Màster universitari en **Formació del Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes**

Treball de fi de màster

Títol:	Pregunta, intuïció i debat en l'ensenyament de les matemàtiques

Cognoms:	Garcia Nacher
Nom:	Dan
Titulació:	Màster en Formació del Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes
Especialitat:	Matemàtiques

Director/a:	Albert Compta

Data de lectura:	13/06/2013

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Institut de Ciències de l'Educació

ÍNDEX

1. INTRODUCCIÓ

La societat i l'estil de vida actuals no fomenten la paciència ni la capacitat de pensar. Els joves d'avui en dia viuen envoltats d'estímuls audiovisuals intensos que els condueixen cap a activitats poc o gens interactives. Aquesta situació els priva en molts casos d'exercir sovint la seva capacitat de pensar i per tant de desenvolupar el plaer per l'exercici del raonament. Contràriament, desenvolupen rebuig a confrontar-se amb les seves pròpies habilitats mentals i mantenen el llindar de l'avorriment a nivells que no es corresponen amb l'edat que tenen.

Per aquest motiu, la didàctica de les matemàtiques en molts casos es limita a intentar que els alumnes memoritzin uns certs procediments o algorismes que porten a la resolució d'un problema tipus. Sovint ens donem per satisfets si els nostres alumnes són capaços d'identificar amb quin exemple model es relaciona el problema que tenen davant i poden aplicar la fórmula adequada. Molt sovint l'alumne no sap el què està fent, i el mínim error de càlcul el porta a obtenir resultats totalment inversemblants, com ara que 'una mare és més jove que una filla', o que 'algú arriba a un lloc abans d'haver sortit', segons s'han lamentat alguns professors.

Com a resposta a aquesta situació de partida, aquest treball proposa l'ús de la 'Pregunta' adequada com a poderós generador de l'exercici de la 'Intuïció' i del 'Debat' corresponents, en l'ensenyament de les matemàtiques. S'incidirà tant sobre la manera d'introduir el nou coneixement com sobre la manera de consolidar-lo. Es proporcionaran exemples concrets de cóm introduir el nou coneixement matemàtic mitjançant la generació d'un debat previ que buscarà l'exercici de la intuïció abans d'entrar a explicar quina teoria matemàtica està implicada. Posteriorment es plantejaran exercicis de consolidació en els que l'alumne no se sentirà agafat de la mà amb preguntes guiadores del tipus a, b i c, on cada una de les dades donades corresponen a una part del procés, sinó amb exercicis que plantejaran preguntes úniques que defineixen problemes del món real. Els alumnes, treballant per equips, hauran de buscar les dades que considerin necessàries per a donar resposta al problema, i descartar les que no els serveixin. En molts casos això provocarà l'obtenció de solucions satisfactòries lleugerament diferents que s'hauran de justificar i raonar davant del grup.

D'aquesta manera es pretén assolir els següents objectius:

- Reforçar la intuïció com a eina d'aprenentatge de les matemàtiques
- Fomentar la capacitat de pensar individual i evitar la recerca impacient de la fórmula
- Motivar el desig per aprendre nous coneixements
- Estimular la retenció mitjançant el raonament i el diàleg

Finalment el treball recull l'aplicació real d'aquest mètode en la preparació i impartició d'una unitat didàctica i els seus resultats en un centre de pràctiques. Així mateix es consideraran noves vies de millora com a reflexió sobre aquests resultats, i s'extrauran les conclusions corresponents.

2. DEFINICIÓ I CONTEXT DEL PROBLEMA

De totes parts del món ens arriben informes d'elevats índexs de fracàs escolar, és a dir, d'alumnes que no acaben l'ensenyament secundari obligatori, i que per tant es considera que no han obtingut els coneixements mínims necessaris per a una incorporació satisfactòria a la vida adulta i al món laboral. Pitjor encara, la tendència en aquest sentit és molt negativa.

D'entre totes les matèries que formen part del currículum a cada país, les matemàtiques, no només tenen consideració de matèria instrumental, sinó que a més és la matèria que presenta un major nombre de fracassos. Per tant, dins l'elevat nivell de fracàs escolar, s'ha de que tenir en compte que sovint molts casos que no considerem fracàs en termes generals pel fet de que han obtingut la titulació bàsica, en realitat no han superat de manera satisfactòria la matèria de matemàtiques.

La situació a nivell estatal és especialment complicada. "**Espanya** és el primer país d'**Europa** en termes de **fracàs escolar** i de mala inserció laboral dels seus joves, segons les dades recollides per la **Unesco** en l'edició 2012 de l'estudi anual *Educación para todos* (EPT), publicat aquest dimarts." [1], segons informava El Periódico del 16 d'octubre de 2012

A continuació veurem algunes causes d'aquest problema a nivell internacional i estatal segons l'opinió d'alguns educadors i també les pròpies observacions que jo mateix he pogut fer en les meves pràctiques al centre col·laborador.

2.1. L'opinió d'alguns educadors

Sir Ken Robinson

Sobre algunes de les causes del fracàs escolar a nivell internacional i més en particular als EE.UU., en la seva conferència *Changing Educational Paradigms* del 2010, Sir Ken Robinson comentava que "vivim en el moment més intensament estimulant de la història del nostre planeta" [2]. Segons ell, el gran dèficit d'atenció que presenten els nostres alumnes a l'aula, és degut en bona part al gran bombardeig d'estímuls que reben quan són fora d'aquesta, de mitjans com els telèfons mòbils, les tabletes electròniques, la televisió, les consoles de vídeo-jocs, etc. En contrast, quan ells entren a l'aula es troben amb el que ell defineix com 'coses avorrides' (*"boring stuff").* En aquest sentit, els educadors juguem un paper clau en poder transformar la visió que els joves tenen de l'aprenentatge a l'escola. No podem canviar el que hi ha fora les aules, però sí el que els alumnes trobaran dins.

Segons Robinson, la reacció de la societat davant aquest problema real ha estat tot sovint el diagnosticar Trastorn de Dèficit d'Atenció amb Hiperactivitat (TDAH), als alumnes. Ell considera que si bé aquesta síndrome existeix, hi ha un sobre-diagnòtic evident. Als EE.UU, els casos de TDAH s'incrementen clarament quan ens movem d'Oest a Est del país. Per tant, moltes vegades ens trobem que estem atacant amb fàrmacs el que no és més que un efecte extern. Com a educadors nosaltres volem tenir els alumnes el màxim desperts al que tenen dintre seu, apunta Robinson.

A les escoles aconseguim que els joves acabin pensant que les coses només poden ser d'una manera concreta. D'aquesta manera 'eduquem' els joves. Aquest procés 'd'educació' és especialment trist, si tenim en compte que una condició comú als més joves precisament és que pensen de manera divergent, que busquen solucions per ells mateixos, i que no estan tancats a cap camí. L'educació hauria de consistir en treure el millor de cadascú. No en que nosaltres impartim una sèrie de coneixements de manera unidireccional i inqüestionable, sinó en fomentar la capacitat de pensar i en que cada alumne construeixi el seu propi coneixement. En aquest sentit considero que les matemàtiques és una de les matèries en les que més incidència té la manera d'entendre el com l'aprenentatge es produeix.

Dan Meyer

A la seva conferència TEDxNYED, *Technology, Entertainment, Design* a Nova York, de març de 2010 *Math class needs a makeover* [3], Dan Meyer diu que després de dedicar 4 hores al dia a veure televisor, programes d'entreteniment gens interactius, els joves d'avui dia als EE.UU. no es troben en condicions de fer servir la seva capacitat de raonament matemàtic, ni tampoc en tenen les ganes. Com a conseqüència ens acabem conformant amb que aprenguin a aplicar unes fórmules, però sense haver entès realment el que estan fent.

Símptomes generals d'aquest 'virus' són:

- Manca d'iniciativa
- Manca de perseverança
- Manca de retenció
- Aversió als problemes descriptius
- Avidesa per la fórmula

Certament, la situació a Espanya és força semblant, tant pel que fa als mals com pel que fa als orígens que apunta Meyer. Segons un article publicat a *El País* el 3 de gener de 2012, sota el tema *Cuatro horas ante la pantalla,* "Nunca en España se había visto tanto la televisión. El consumo medio el año pasado rozó las cuatro horas diarias. O lo que es lo mismo: los espectadores dedicaron en 2011 el equivalente a dos meses de su vida a contemplar el electrodoméstico más venerado" [4]. Els joves no són l'excepció. I nombrosos estudis alerten sobre la nefasta repercussió que té l'excés de televisió en els joves estudiants.

Álvaro Marchesi

En el seu document de treball de novembre de 2003, *El fracaso escolar en España,* Àlvaro Marchesi comentava quasi deu anys enrere quines eren per ell les principals causes que feien que España tingués en aquell moment un dels índex de fracàs escolar més elevats d'Europa, i que finalment s'ha convertit en el més elevat. Ell apuntava a totes les esferes d'influència de manera jeràrquica, començant pel propi conjunt de la societat, seguit de la família, del sistema educatiu, del centre docent, de l'ensenyança a l'aula i de la disposició dels propis alumnes, aquest últim punt englobant una mica la conseqüència de tots els altres. Segons Marchesi, la disposició dels alumnes actualment és d'una evident falta d'esforç i d'interès. Aquesta manca en l'esforç acaba essent decisiva en els mals resultats. Però no podem culpar els alumnes d'una mala disposició generalitzada. Tenim que avaluar quina part d'incidència tenim nosaltres com a professors en la seva manca d'interès i de dedicació.

En paraules de Marchesi: "Parece, sin embargo, razonable concluir que aquellos países cuyos profesores tienen una mayor tradición en desarrollar una enseñanza funcional y aplicada, conectada con la experiencia y con la vida real y en la que se otorga una especial importancia a la adquisición de estrategias y procedimientos de aprendizaje, tendrán una cierta ventaja en comparación con aquellos otros más vinculados a la exposición teórica y a la adquisición de conceptos. Es posible apuntar que España se encuentre en este segundo grupo de países" [5]

Per tant, d'aquí podem concloure que depenent de cóm estiguem ensenyant nosaltres, podem estar sumant al problema o restant, essent part del problema, o proposant part de la solució.

2.2. Observacions pròpies al centre de pràctiques

Durant el pràcticum al centre he pogut observar l'actitud dels joves d'avui en vers l'educació, en diverses matèries. Tot i anar a un centre que dóna resultats acadèmics una mica per sobre de la mitjana dels centres públics, les poques ganes d'aprendre i la desgana generalitzada semblen ser la raó de ser de l'alumne. Especialment a matemàtiques, els joves solen tenir interès només per a saber cóm es resol el problema que sortirà a l'examen. Costa molt captar la seva atenció en les explicacions teòriques, ja que només volen anar a l'exercici tipus, sense haver d'entendre res. Prefereixen no haver de pensar. Inclús, quan es veuen assaltats per una sobtada pregunta del professor per a saber si ho estan entenent o no, si aquesta s'adreça a tota la classe, ningú la respon (com si tothom estigués entenent), i si es llença a títol personal, sovint l'alumne senzillament respon que no ho ha entès. En ocasions, el professor retorna la pregunta, 'què és el que no has entès?', i l'alumne tampoc ho sap! Realment no estan atents. Els és igual l'explicació. Només volen que el professor faci un exercici a la pissarra que ells puguin copiar a la seva llibreta per a poder memoritzar el dia abans de l'examen. Sovint he tingut la sensació de que no hi ha interacció real professor-alumne. Els alumnes no tenen interès, i mentre sentin la veu del professor de fons tot va bé, segons el que tenen previst i controlat. Ha de ser que el professor calli de cop, o comenci a preguntar un per un per a que els alumnes tornin a connectar.

A l'hora de fer exercicis, un cop superada la fase d'explicació inicial, molt sovint he pogut presenciar la falta de comprensió del que s'estava fent. Sí, els alumnes portaven nombres amunt i avall, però sense estar entenent res. Curiosament, en aquest punt, semblen sentir-se còmodes. Però la interpretació de resultats i l'auto-avaluació posen de manifest la seva falta de comprensió.

2.3. Implicació sobre les competències bàsiques, fracàs escolar i resultats PISA

Des de l'entrada a la nostre regulació del concepte de competències bàsiques, queda més de manifest la necessitat de que l'alumne en acabar l'ensenyament secundari obligatori, sigui una persona capaç d'aplicar els seus coneixements a aspectes pràctics de la vida quotidiana i laboral. Ja no es busca que els alumnes surtin de l'escola amb un gran cabal de coneixement, sinó que els sàpiguen aplicar.

En aquest sentit, és imperatiu ensenyar els nostres alumnes a raonar, a utilitzar la seva capacitat de pensar, així no sigui sobre uns continguts tant extensos. La vessant pràctica que s'ha intentat potenciar demana capacitat de raonament.

Paral·lelament a això, els resultats acadèmics d'àmbit estatal que estem recollint després d'haver posat per davant la fórmula sobre el raonament, tampoc suporten la tradicional manera de pensar, doncs els alumnes segueixen suspenent cada cop més les matemàtiques. I quan sortim del nostre país per fer proves internacionals adreçades a la vessant més pràctica com són les proves PISA tampoc sortim ben parats [6], tenint en compte l'elevat índex de desenvolupament socioeconòmic del nostre país en el còmput general. Per tant, els mals resultats aconseguits fins ara ens haurien de fer estar menys temorosos a l'hora de buscar el canvi i la innovació didàctica.

És evident, no obstant, que gran part dels coneixements adquirits s'obliden poc temps després, especialment un cop superada l'avaluació. Però el que mai s'oblida és la capacitat de raonar que haguem pogut desenvolupar durant els anys d'ensenyament obligatori. Degut a un mal enfoc en aquest sentit, molts professionals que ostenten el títol de l'ESO, es troben sovint en situacions en les que han de saber sumar o restar un IVA, fer una regla de tres i altres coses per l'estil, i no saben per on començar. De què ens ha servit que el dia de l'examen haguessin memoritzat uns algorismes més complicats per a resoldre certs problemes tipus.

Com ens diu Marchesi l'any 2003: "la existencia de expectativas positivas contribuyen a que los objetivos propuestos se cumplan. Por ello, en la lucha contra el fracaso escolar debe extenderse la idea y la convicción de que es posible reducirlo y de que se puede lograr que todos los alumnos aprendan y aprendan suficientemente. El fracaso escolar no es algo consustancial con la sociedad y la educación sino que deriva en gran medida de su mal funcionamiento" [7].

3. DESCRIPCIÓ DE LA SOLUCIÓ PROPOSADA

3.1. Pregunta, intuïció i debat

L'objectiu d'utilitzar la pregunta com a estimulant de la intuïció i com a generador de debat és evitar que l'alumne tingui una actitud passiva a l'aula. Això ho podem il·lustrar comparant la relació professor-alumne a la de pilot i copilot en un viatge en cotxe, a través d'una experiència personal. Recordo haver estat acompanyant al cotxe incomptables vegades en un viatge que efectuava cada setmana. Em coneixia cada detall del paisatge, cada racó del trajecte. No obstant, el dia que vaig tenir el carnet de conduir i vaig anar-hi sol per primera vegada, em vaig perdre. Aquesta experiència il·lustra el fet, de que mentre depenem dels altres no fem realment nostre l'aprenentatge. I fins que això no succeeix, no es pot dir que som realment competents. Sí, tenim coneixements, sabem coses, però no els sabem aplicar per a resoldre un cas real, pràctic.

El nostre objectiu com a professors, és aconseguir que els alumnes 'agafin el volant' de tant en quant, fins els dia que ja puguin anar sols. Que es confrontin sovint amb el seu coneixement. Quan no som nosaltres els que conduïm, no ens preguntem constantment 'quin és el següent pas a seguir?', o, 'per on hauria d'anar ara si fos jo el que condueix?'. Un senzillament accepta les decisions del conductor sense més. El fet de no haver-nos fet 'la pregunta' no ens ha permès estar atents a 'la resposta', al que anava passant al nostre voltant, a les decisions que s'estaven prenent. Finalment el dia que ens toca conduir, no sabem per on tirar.

Volem evitar que els nostres alumnes tinguin l'actitud passiva del copilot. Volem que ells es facin la pregunta, que no estiguin 'tant segurs' de que la direcció que nosaltres prenem com a professors és la bona. Això ens ha passat a tots en alguna ocasió en agafar un taxi. Normalment diem on volem anar i ens despreocupem. Però a vegades, després d'un parell d'accions dubtoses ens n'adonem que o estem realment a sobre de la jugada nosaltres mateixos, o potser no arribem a la destinació correcte. A partir d'aquest moment, tot i no tenir el volant a les mans, ja no ens podem relaxar, hem d'estar totalment atents, i de tant en tant caldrà que ens expressem. Doncs bé, aquesta és l'actitud que volem dels nostres alumnes. Que es preguntin, 'cap a on tirarà ara el professor?', o fins i tot, 'és correcte l'opció presa?'.

Per tant la pregunta tindrà un paper molt important en el seu estar atents, en el seu qüestionar el que el professor està fent, i finalment en el seu aprenentatge. Serà gràcies a la pregunta que els estudiants estaran desitjosos d'escoltar la resposta que els puguem donar. Gràcies a fer-se la pregunta, tindran una opinió prèvia a la nostre explicació. S'haurà posat en marxa la seva intuïció. Molts cops aquesta intuïció els haurà portat pel bon camí. En altres ocasions la resposta que els donarem diferirà del que ells havien pensat. Però ara, la nostra resposta, els haurà de convèncer, els haurà de semblar satisfactòria, no l'acceptaran sense més, l'hauran de fer seva.

Sovint la pregunta que proposem ens pot servir per a generar debat. Els alumnes escoltaran nombroses respostes dels seus companys, i donaran la seva pròpia també. Això els portarà a intentar expressar-se de manera convincent, a intentar que els altres entenguin perquè ells tenen raó. No serà suficient un sí o un no. Hi haurà companys que no estaran d'acord amb el que altres diguin, i això portarà a l'exercici del raonament. Quant finalment el professor proposi la resposta definitiva, tothom la confrontarà amb la seva opinió prèvia. D'aquesta manera, l'exercici de la intuïció, i la pròpia discussió a l'aula no només estimularan la capacitat de raonament sinó també la memòria.

En relació amb els exercicis de consolidació, la pregunta apropiada és igualment important. Si volem que l'alumne pugui posar 'les mans al volant', i arribar a destí ell sol, necessitarem demanar-li aquesta 'destinació' des de bon principi. En les explicacions prèvies ja haurem vist els passos intermedis que s'han de seguir. Ara serà moment de que l'alumne s'enfronti ell mateix al seu coneixement. Si fem masses preguntes guiadores, és possible que l'alumne acabi arribant on nosaltres volem, però que en realitat no tingui una visió global del que ha fet. És possible que realment continuï sense saber anar tot sol fins la 'destinació' que hem proposat. Els problemes de la vida real no vénen acompanyats de passos intermedis. I és allà on realment s'acaba provant la competència dels nostres alumnes. No volem deixar-ho tot per aquell moment. Volem que els alumnes comencin a tastar la realitat des de l'escola, quan estan aprenent.

És clar, res d'això implica que el paper del professor un cop proposats els exercicis de consolidació no hagi de ser igualment actiu, doncs la majoria d'alumnes no estaran preparats per a resoldre ells sols els exercicis des d'un bon principi.

3.2. Fonaments teòrics

3.2.1. El paper de la intuïció en l'aprenentatge de les matemàtiques

En el seu article *La intuición en matemàticas,* Inés Maria Gómez Chacón comenta: "Aunque la matemática es un sistema deductivo de conocimientos, la actividad creativa en matemáticas es un proceso constructivo, en el cual los procedimientos inductivo, las analogías y las conjeturas plausibles, juegan un papel fundamental" [8]. Sí, el procés intuïtiu va molt més enllà de la deducció racional. Tot el conjunt d'experiències diàries de manipulació o interacció amb el nostre entorn, juntament amb altre tipus de coneixements adquirits mitjançant l'estudi, o la mera repetició, deixen una impremta en "la pupil·la de la ment", que ens guia de manera certera al llarg de la nostra vida. A vegades aquesta experiència ens porta a un coneixement que es troba en un estadi més conscient i elaborat, i altres vegades en un estadi més primitiu, però encara vàlid i guiador. Això ho podem constatar amb la nostra capacitat per a distingir rostres. Tots tenim l'habilitat de reconèixer uns trets facials característics en les persones que coneixem que ens permeten identificar-les de manera ràpida i amb precisió. No obstant, aquest coneixement, tot i que vàlid es troba en un nivell primitiu de consciència, doncs no ens permet fer una descripció detallada de la persona que volem a menys que la tinguem al davant, o si menys no, no ens permet elaborar un dibuix que permeti altres persones saber en qui estem pensant. A pesar d'això, ningú de nosaltres trauria valor a aquest coneixement, o dubtaria en la nostre capacitat per a no equivocar-nos al reconèixer gent. La nostre percepció la donem lògicament com a bona.

Tot i això, quan parlem de l'aprenentatge de les matemàtiques, tot sovint ens oblidem de la importància que juga tot aquest recull de coneixement més o menys conscient que hem anat elaborant durant el temps i que ens permet fer ús de la nostre intuïció. Inclús els propis alumnes a vegades parlen de 'corazonadas', per a referir-se a la seva pròpia intuïció, d'alguna manera treient-li valor.

En canvi, l'ús apropiat de la intuïció ens pot permetre tant el tenir una idea prèvia d'un resultat d'una manera immediata i encertada, com poder ser crítics amb els resultats obtinguts després d'aplicar formulació. En aquest sentit Gómez Chacón fa referència a la necessitat de deixar de banda la convicció que tenen molts estudiants de que l'èxit en front un problema està garantit pel coneixement d'informació i l'elaboració de dades. Així, com dèiem al principi, si aconseguim vèncer aquestes idees preconcebudes, els nostres estudiants desenvoluparan un sentit crític cap als resultats obtinguts amb formulació, i els contrastaran amb la seva pròpia experiència. Per tant, la intuïció jugarà un paper important, tant en la introducció dels nous conceptes que s'hauran de relacionar amb tot allò que els estudiants ja coneixen i amb la seva pròpia experiència, com en la resolució de problemes i la seva validació.

Les aplicacions que podem trobar a l'exercici de la intuïció en l'ensenyament de les matemàtiques, queden referides en la classificació que Gómez Chacón fa dels diferents tipus d'intuïció:

- **Intuïcions afirmatòries:** es refereix a l'acceptació com a vàlid i cert de fets que són immediats i auto-evidents. Per exemple, nocions o conceptes com la força, i la seva relació amb el moviment, o altre tipus de deduccions immediates com si A=B i B=C, aleshores A=C

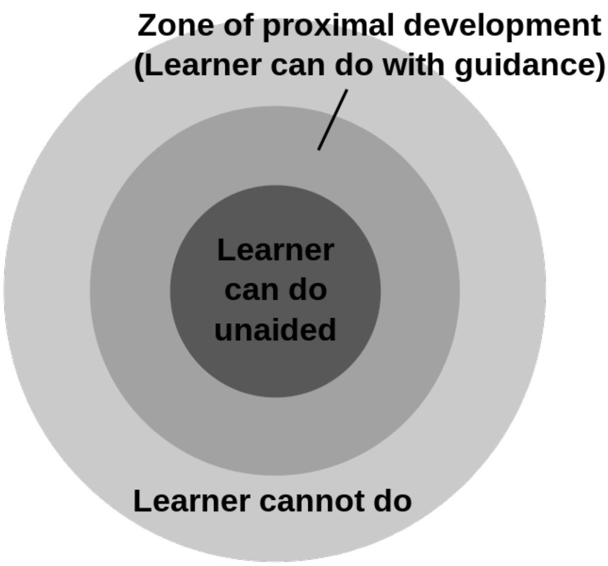
- **Intuïcions conjecturals:** són hipòtesis a sentiments de certesa. Per exemple aquella seguretat que podem tenir sobre un esdeveniment proper.

- **Intuïcions anticipatòries:** són també conjectures, però que tenen una incidència especial en la resolució de problemes. Fa referència a la "perspectiva preliminar, global, d'una solució d'un problema, i precedeix a l'anàlisi i el desenvolupament d'una solució."

- **Intuïcions conclusives:** visió global conclusiva de les idees essencials que ens han portat a la resolució d'un problema prèviament elaborat. Afegeix un sentiment de certesa i validació sobre el procediment emprat i el seu resultat.

3.2.2.Lev Vygotsky, Jerome Bruner, i el concepte de repte

El psicòleg soviètic *Lev Vygotsky*, als anys 30 del segle passat, va introduir el concepte de Zona de Desenvolupament Proper, segons el qual s'estableixen tres zones que delimiten el que el nostre nivell de coneixements actual ens permet fer o resoldre. En la primera zona trobem tot allò que l'estudiant pot resoldre sense l'ajut de ningú, amb els coneixements que té. En la segona zona trobem tot allò que l'estudiant és capaç de fer amb els coneixements presents, però de manera assistida. En el tercer nivell, tenim tot allò que escapa totalment del que l'estudiant pot fer amb els coneixements presents.



Imatge 1. Zona de Desenvolupament Proper. Esquema

Per tant, la segona zona, el que anomenem Zona de Desenvolupament Proper, es podria definir segons paraules del mateix Vygotsky com "la distància entre el nivell de desenvolupament actual de l'alumne, determinat per la independència en la resolució de problemes, i el nivell de desenvolupament potencial, determinat per la resolució de problemes sota l'ajuda d'un professor o en col·laboració amb altres companys més competents" [9].

Segons aquesta definició, el paper del professor consisteix en bona part en proporcionar els estudiants d'aquelles experiències que es troben dins la Zona de Desenvolupament Proper i que per tant estimulen i fan avançar el seu aprenentatge individual. D'acord amb les teories constructivistes de l'aprenentatge, l'experiència és essencial per a que es produeixi l'aprenentatge, s'aprèn fent. Però de nosaltres pot dependre el proporcionar l'experiència adequada al coneixement present dels nostres alumnes.

Si els portem cap a experiències excessivament llunyanes, no els podrem oferir un suport sobre el qual ells es puguin bellugar i puguin avançar. Els haurem de donar tot fet i mastegat, i els haurem de proporcionar un seguit de formulacions aplicables en un model de problema que en cap cas entendran. El valor competencial d'aquest coneixement és nul. No hauran construït el seu propi coneixement. El que és pitjor, s'haurà produït un trencament entre el que ells realment coneixen i tenen interioritzat, i el que els estem demanant. No veuran el lligam dels seus coneixements previs amb els nous, i per tant, els coneixements previs perdran valor.

Volem el contrari. Volem aconseguir que els nostres alumnes valorin el seu coneixement previ, i de que tinguin consciència de que aquest és elemental per a poder seguir avançant. Volem que els alumnes utilitzin tot allò que ja saben, que ja han fet seu, per a que s’adonin de quan a prop estan del que els estem demanant, del nou coneixement, o de la Zona de Desenvolupament Proper. Això, no només farà factible el nou coneixement, sinó que a més, suposarà un gran incentiu per l’esforç que requereix l’aprenentatge.

Per a que el resultat sigui òptim, el professor ha de ser capaç d’oferir als alumnes aquella pregunta, o aquell problema que suposi el grau de repte apropiat. Si és excessivament senzill, estarem presentant un problema que portarà a l’aplicació directa del que ja se sap, sense produir-se cap mena de construcció d’aprenentatge. Si és excessivament difícil, l’estudiant no se sentirà motivat ni tant sols a provar. La nostre intenció és que l’estudiant sigui capaç de plantejar preguntes que reclamin la nostre assistència, no que l’alumne no sàpiga ni per on començar i nosaltres haguem d’explicar tots els passos.

És necessari per tant, que el professor tingui una sensibilitat especial per a saber demanar allò que pot engrescar els seus alumnes d’acord amb les seves possibilitats, sense avorrir, ni desanimar. Això no obstant, no és senzill, ja que conforme els estudiants van avançant en el seu aprenentatge, la delimitació d’aquestes zones es va movent, i per tant, el professor s’ha d’anar adaptant.

El psicòleg nord-americà *Jerome Seymour Bruner*, a finals de la dècada dels anys 50, va introduir el concepte de Bastida (*Scaffolding)* [10], referint-se a aquest suport que el que ensenya, o en aquest cas, el professor brinda a l’alumne per a obtenir uns resultats més enllà dels que obtindria amb el seu esforç individual. El concepte, que està íntimament lligat a les teories de Vygotsky, descriu de manera molt il·lustrativa el paper del professor en l’aprenentatge dels seus alumnes. Les bastides són usades de manera temporal per a donar accés a certs llocs, i són retirades quan ja no fan falta. De la mateixa manera, el professor ha de donar suport a l’alumne per a que aquest pugui accedir a determinats coneixements, però ha de treure aquest suport conforme l’alumne es mostra segur en aquests coneixements. Així doncs, si el professor vol ser capaç de proporcionar sempre el repte adequat, haurà d’anar movent el suport que ofereix conforme els alumnes van avançant.

A la vegada, aquest suport pot ser també aportat pel propi treball col·laboratiu, doncs segons la pròpia definició de Zona de Desenvolupament Proper de Vygotsky, el nivell de desenvolupament potencial ve determinat per la resolució de problemes amb l’ajut d’un professor o en col·laboració amb altres companys més competents’ [9]. Per tant, sempre que sigui possible, utilitzarem el debat i el treball col·laboratiu per a donar resposta a la pregunta o al repte que haguem plantejat.

3.2.3.Procés històric del desenvolupament matemàtic

Bona part de l’estudi de la història de les matemàtiques té a veure amb determinar els orígens de les descobertes matemàtiques i entendre els processos que van portar a tals descobertes. El procés històric ha estat sempre el procés natural de descobriment. Perquè no intentar reproduir aquest procés natural en les ments dels nostres estudiants, per comptes d’oferir tot el procés de dalt a baix com el que narra una història sense fer-los partícips, o pitjor encara oferint només les conclusions finals d’aquest procés?

En ocasions, els procés històric ha tingut a veure amb la mera experimentació. Per exemple, el nombre pi és conegut des de temps immemorials. Apareix en les proporcions de la gran piràmide de Giza, que data de voltants de 2589–2566 a.C. [11]. No obstant, el nombre pi no va ser calculat en primeres estimacions fins alguns milers d’anys més tard per matemàtics com Arquimedes i Liu Hui. D’aquest fet concloem que la descoberta del nombre pi en primera instància va ser per pròpia mesura. Així i tot per arribar a prendre la mesura, ens hem de plantejar primer si hi ha alguna relació constant entre el perímetre d’una circumferència i el seu diàmetre. Podríem dir que aquesta va ser la pregunta original. Per tant, perquè no fer aquesta pregunta als nostres estudiants i generar un debat obert al respecte, escoltant les veus de tothom i els seus raonaments. La conclusió d’aquest debat no serà la resposta que nosaltres podem donar, sinó la pròpia experimentació empírica dels alumnes quan els demanem que mesurin els perímetres i els diàmetres d’uns quants objectes circulars que es troben a l’aula com per exemple papereres, porta-llapis, o materials manipulatius del departament de matemàtiques especialment pensats per a l’experimentació.

Així doncs, no podem obviar la pregunta original implícita a tota descoberta, a saber, *és això possible?* Per exemple, quan treballem les raons trigonomètriques amb els nostres estudiants, en comptes de fer tota l'explicació que ens porti a poder preguntar, 'quant mesura la torre de l'altre costat del riu?', abans d'entrar en explicacions, una manera adequada d'introduir la teoria implicada pot ser preguntant, 'és possible conèixer quant mesura la torre de l'altre costat del riu sense accedir-hi, sense prendre la seva mesura directa?' Aquesta és la pregunta original, no la obviem. Pel contrari, generem debat en torn a aquesta pregunta. És més, si tenim ocasió de situar-nos davant del 'riu' amb els nostres alumnes, els podem demanar una estimació a cadascú sobre quant creuen que pot mesurar la torre. Així els ajudem també a relacionar el fet de poder fer una estimació intuïtiva amb el fet de que sí és possible trobar una solució exacte. Quan veiem la teoria implicada i resolguem el problema, no qualsevol valor serà vàlid, doncs haurem posat la intuïció i la lògica per davant de la mera computació.

Hi ha incomptables descobertes matemàtiques que estan ben documentades històricament i que són del nivell que ensenyem a l'ESO i al Batxillerat, que ens poden ajudar a introduir la teoria a través de la pregunta adequada. Un bon exemple d'això és l'estimació de les mesures de la Terra d'Eratòstenes. En comptes d'entrar directament a explicar el que ell va fer, podríem posar el repte en front d'ells en forma de pregunta, 'és possible determinar el diàmetre aproximat de la Terra sense sortir d'ella? Això pot portar a respostes teòricament vàlides diferents a la que va usar el propi Eratòstenes, com usant la distància a l´horitzó des de una alçada determinada. En qualsevol cas, com dèiem unes línies enrere, el paper del professor és el de proposar el repte adequat i anar proporcionant la informació necessària a mesura que els alumnes la demanen. En aquest cas, podem anar subministrant les pistes poc a poc depenent de la resposta dels nostres estudiants. Algunes d'aquestes respostes poden ser en forma de pregunta, 'quants graus té el perímetre de la terra?' o 'quants graus hi ha entre l'equador i els pols?', o 'quina és la inclinació del sol a l'equador a les 12 hores solars?, i 'quina és la màxima inclinació del sol a Barcelona?' o, després de fer un esquema, 'quina és la inclinació del pla de l'eclíptica?'. La pregunta apropiada pot despertar la seva intuïció i alinear-la amb el procés de descoberta matemàtica.

3.2.4. Valoració d'opinions contràries

En un estudi publicat l'any 2006 sota el tema *Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching,* els psicòlegs educatius Paul A. Kirschner, John Sweller i Richard E. Clark, comenten "Tot i que els enfocs sobre instruccions guiades mínimes, o nul·les, són molt populars i atractives des d'un punt de vista intuïtiu, el fet és que aquests enfocs passen per alt tant l'estructura que suporta el coneixement humà, com l'evidència d'estudis empírics dels darrers cinquanta anys que demostren una i altre vegada que la instrucció guiada mínima és menys efectiva i eficient, que aquells enfocs educatius que posen més èmfasi en guiar el procés d'aprenentatge de l'estudiant. L'avantatge de guiar comença a desaparèixer només quan els estudiants tenen un nivell suficient de coneixements previs que els permeten proporcionar guia 'interior'" [12].

En opinió meva, aquest tipus d'afirmacions, no contradiuen la utilitat d'usar estratègies d'aprenentatge basades en el constructivisme, la guia mínima, o l'ús de preguntes per generar debat. La última frase que he transcrit, quan ells diuen que "L'avantatge de guiar comença a desaparèixer només quan els estudiants tenen un nivell suficient de coneixements previs que els permeten proporcionar guia 'interior'" [12], ens ha de fer prendre consciència en tot cas de la importància de saber en tot moment quins són aquests coneixements previs, i quines possibilitats tenen els nostres estudiants d'auto-proporcionar-se aquesta guia interior.

Si som capaços de mantenir les experiències dels nostres alumnes sempre dins de la Zona de Desenvolupament Proper, el seu aprenentatge es podrà produir amb una guia mínima de ben segur. Per tant, la manera d'aplicar la metodologia proposada no pot ser dogmàtica, ni aliena a la realitat de l'aula. Com dèiem en línies anteriors, part de la competència nostre com a professors és saber bellugar el suport (*Scaffolding),* en funció de la realitat present i dinàmica dels nostres alumnes, de manera que sempre presentem el repte adequat, i oferim la guia corresponent.

Com a suport d'aquestes afirmacions tot seguit es presenten dues situacions que reforcen la necessitat de treballar amb els alumnes amb el repte adequat i que harmonitzen amb la idea d'aquest treball.

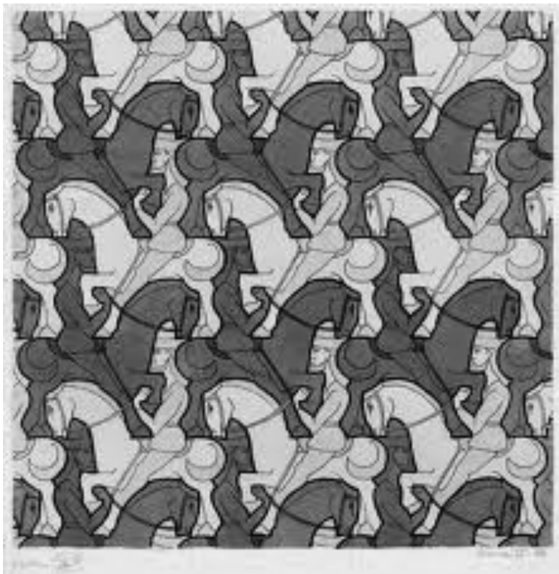
3.2.4.1. Testimoniatge d'aula

En un centre de secundària, vaig presenciar una actuació d'un professor de matemàtiques de 1er d'ESO que demostra la importància de saber fer la pregunta adequada, que sí suposi un repte pels estudiants, però que a la vegada aquest repte no escapi les possibilitats dels estudiants de proporcionar-se guia interior ells mateixos, i per tant d'aprendre.

Introduint la unitat didàctica sobre àrees i superfícies, i després de recordar que les longituds les mesurem en una sola dimensió, amb unitats tal com el metre, o el centímetre, el professor va llançar la següent pregunta a la classe: "Quina forma hauria de tenir una unitat de superfície per a que ens fos útil i pràctica?"

Després d'escoltar diferents idees de fons, una alumna va aixecar la mà i va dir que la forma ideal era el quadrat. El professor li va demanar que raonés la seva resposta. La resposta d'aquella alumna de 1er d'ESO no era la resposta que trobaríem en un llibre, tot i així, es podia veure clarament que ella estava entenent el concepte i les seves implicacions. Quedava clar que la seva intuïció l'havia portat pel camí correcte.

Posteriorment a l'explicació de l'alumne, el professor va projectar a la pissarra digital diferents exemples mostrant què passaria si intentéssim cobrir una superfície amb cercles, el·lipses, o fins i tot pentàgons. Aquí es podien veure les primeres implicacions reals, i és que aquestes formes geomètriques no cobreixen el pla per sí mateixes. Si les volguéssim usar com a unitats per a mesurar àrees hauríem de combinar-les amb altres formes complementàries, i finalment expressar les dimensions d'una superfície en funció de dues unitats.


Imatge 2. Algunes figures d'Escher cobreixen tot el pla

Un cop vist que aquests tipus d'unitats no ens servien, el professor va projectar a la pissarra altres formes geomètriques que sí cobreixen el pla, com el triangle, el rectangle, l'hexàgon o fins i tot les figures d'Escher. Per tant, podríem usar aquestes formes com a unitats, però evidentment no serien pràctiques. Tot i cobrir el pla no s'adapten fàcilment a qualsevol forma.

Així doncs, va ser el professor qui va aprofundir en les implicacions d'escollir el quadrat com a unitat de superfície, però després d'haver fet pensar a la classe, i d'haver escoltat respostes diverses, i els seus raonaments. Va ser al final de la seva explicació que el professor va concloure que el quadrat era la forma més idònia per a ser utilitzada com a unitat de superfície.

Però cóm sabia el professor que no estava posant un repte inaccessible per als estudiants? Com sabia ell que no els estava portant a frustració? Com sabia el professor que els coneixements previs dels seus alumnes els podien portar a raonar sobre la situació plantejada?

Vaig tenir la oportunitat, a última hora del matí del mateix dia, d'assistir a una altre classe del mateix professor sobre un altre grup també de primer d'ESO, amb exactament el mateix contingut didàctic. Estava expectant al moment clau de la pregunta, a veure quina seria la resposta d'aquest segon grup. Entre d'altres veus, un alumne va dir que seria bo que la forma d'aquesta unitat de superfície tingués tots els costats iguals. Sobre aquesta afirmació, una altre alumna va destacar que per tant, la millor forma seria la quadrada. Altre cop, els alumnes no van saber donar les explicacions detallades del que la seva intuïció els havia portat a concloure. No eren capaços de considerar de manera conscient tots els aspectes implicats. Aquesta explicació va venir de la mà del professor, extraient la conclusió apropiada de la mateixa manera que havia fet en la classe de l'altre grup.

Per tant, la doble experiència em va permetre testimoniar cóm les instruccions guiades mínimes sí funcionen *(do work),* sempre i quant el professor proposi un repte d'acord amb els coneixements previs dels seus alumnes. En aquest cas concret, la pregunta apropiada, i el debat que es va generar al seu voltant va portar a ambdós grups a trobar la resposta correcte.

Aquest doble encert, no només implica que el repte era apropiat pels dos grups. Implica també que el repte era proper al nivell de coneixements previs de cada alumne. No tots ells haguessin donat amb la resposta correcta, però sí que tots hi estaven a prop, i tenien la capacitat d'acceptar el repte dins seu. Per tant, si un grup hagués estat menys efectiu que l'altre, el professor encara hagués pogut guiar-los una mica més en el seu procés d'arribar a la resposta correcta.

Aquí rau una de les majors virtuts del docent, saber adaptar el nivell d'ajuda que s'ofereix als estudiants de tal manera que siguin ells mateixos els que arribin a les conclusions correctes, i que en cap moment deixi de funcionar la guia interior de la que parlen Kirschner, Sweller i Clark en el seu estudi, com a contraposició al que aquest treball considera una guia excessiva. Aquesta guia interior és la que nosaltres volem que estigui sempre a l'avantguarda del seu aprenentatge.

3.2.4.2. L'ensenyament als EE.UU. i al Japó. Anàlisi de metodologies

Els psicòlegs educatius James W. Stigler i James Hiebert fan una comparativa sobre la manera d'ensenyar als EE.UU., al Japó i a Alemanya. Destacarem els casos d'EE.UU. i Japó pel fet de que es situen en extrems contraposats, la qual cosa ens ajuda a comprendre les implicacions de cada una de les metodologies amb més claredat. *The Teaching Gap* és el llibre en el que els autors extreuen conclusions mitjançant l'anàlisi de vídeos de classes de matemàtiques filmades als EE.UU. Japó, i Alemanya, en el marc del *Third International Mathematics and Science Study (TIMSS).* A continuació es destaquen alguns dels trets més singulars del dia a dia de les aules d'ambdós països.

Trets singulars d'una lliçó de matemàtiques als EE.UU. segons Stigler i Hiebert

- Després d'haver repassat els deures, "el professor distribueix un full de treball que conté problemes semblants. Els alumnes treballen pel seu compte" [13].
- "El professor vigila el treball dels alumnes, observa que alguns alumnes tenen dificultats amb alguns problemes els diu cóm resoldre'ls.

  Nota: Generalment el professor intervé a la primera senyal de desànim o dificultat" [13].
- Cap al final de la lliçó, "el professor fa un ràpid repàs oral de problemes semblants als ja resolts" [13]

Trets singulars d'una lliçó de matemàtiques al Japó segons Stigler i Hiebert

- Després d'haver estat treballant una estona pel acabar uns exercicis del dia anterior "els alumnes exposen els mètodes de solució que han trobat i el professor fa una síntesi de les seves presentacions" [13].

- "El professor anuncia l'activitat del dia i demana als alumnes que treballin pel seu compte (el treball consisteix en inventar un problema que els seus companys hauran de resoldre).

  Nota: Generalment s'anuncia el treball del dia i es permet que els alumnes el realitzin a la seva manera. Sovint poden fer-ho aplicant un mètode après recentment" [13].

- "El professor anima als estudiants a seguir treballant en grups petits. Els caps dels grups debaten els problemes amb el professor, qui els escriu a la pissarra. Els alumnes copien els problemes i comencen a resoldre'ls.

  Nota: Els alumnes rarament treballen gaire estona sense que s'hagi produït un debat a classe. Els alumnes generalment procuren trobar la solució del problema abans de que intervingui el professor" [13].

- Cap al final de la lliçó "el professor destaca un mètode convenient per a resoldre aquesta tipologia de problemes" [13].

Els diferents enfocs didàctics observats en els vídeos, els va resumir de manera força impactant, un dels participants en el *Third International Mathematics and Science Study (TIMSS).* Aquest va destacar: "Al Japó tenim per un costat les matemàtiques i per l'altre, els alumnes. Aquests treballen amb les matemàtiques, i el professor actua d'intermediari en la relació entre els alumnes i les matemàtiques. [...] Als EE. UU. hi ha alumnes i hi ha un professor. La veritat és que m'ha costat trobar les matemàtiques. L'únic que percebo és interacció entre els alumnes i el professor" [13].

Aquestes paraules, tot i magnificant la situació, posen de relleu el fet de que mentre la feina dels alumnes consisteixi en saber mimetitzar uns certs procediments aplicables a una tipologia de problema, els alumnes no s'estan enfrontant a les matemàtiques, no estan fent matemàtiques. A tot això, la visualització dels vídeos, sembla indicar, segons Stigler i Hiebert, que el nivell de les matemàtiques que s'imparteixen als EE.UU. és menys a avançat que no pas al Japó, per al mateix grup d'edat. Finalment, els resultats de les probes PISA [6], situen al Japó entre els països punters mentre que els EE.UU. no se situen ni de bon tros a prop de la zona que correspondria a un país del seu nivell de desenvolupament socioeconòmic.

Per tant, l'evidència sembla indicar que si volem que els nostres alumnes aprenguin matemàtiques, el que dóna millor resultat és posar-los a pensar, deixar que desenvolupin la paciència necessària que requereix la resolució de problemes, que posin en consideració tot el que fins aquell moment coneixen, que comparteixin les seves 'descobertes' o les seves opinions amb els altres companys, i finalment, i no abans, que el professor orienti l'esforç realitzat pels alumnes cap al procediment òptim.

Això, no obstant, no s'aconsegueix entrant a l'aula posant una cara diferent. Com diuen Stigler i Hiebert: "Al Japó [...], els professors dissenyen i organitzen de manera minuciosa les seves lliçons, de manera que el més provable és que els alumnes apliquin els procediments desenvolupats recentment en elles" [13]. Així doncs, com cabria esperar, l'aprenentatge dels nostres estudiants depèn en bona mida de l'esforç del professor en la planificació i disseny de les lliçons. Només d'aquesta manera sabrem oferir als nostres alumnes la pregunta adequada pels seus coneixements, que suposarà un repte estimulant capaç de posar en funcionament la seva capacitat de raonar i la seva intuïció.

3.3. Desenvolupament de la solució proposada

La proposta d'aquest treball, d'utilitzar la pregunta convenient per a estimular l'ús de la intuïció i el raonament en els nostres estudiants, i generar el debat corresponent, és aplicable a totes les fases de la impartició d'una unitat didàctica, tal com he procurat fer sempre en la meva experiència al centre de pràctiques, i que queda reflectit en l'apartat 4 d'aquest treball sobre els resultats obtinguts.

Tot seguit es proposen alguns exemples de l'aplicació de la metodologia proposada des de la introducció dels nous coneixements a la consolidació d'aquests.

Exemple 1. Resolució de triangles rectangles.

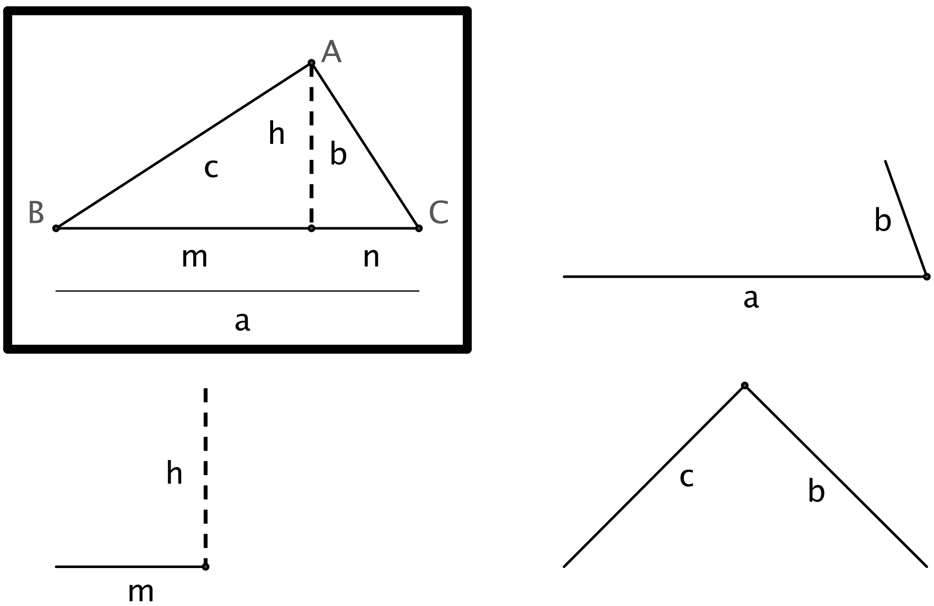
Els teoremes sobre semblança en els triangles rectangles, ens permeten juntament amb el teorema de Pitàgores i la trigonometria, saber en tot moment totes les dimensions d'un triangle rectangle, a partir de d'unes poques dades. Sovint s'expliquen les seves demostracions de manera geomètrica, o algebraica, la qual cosa no deixa de ser apropiada i necessària. No obstant, a l'hora d'aplicar els teoremes per a la resolució de triangles rectangles, els alumnes sovint es limiten a gestionar fórmules a munt i avall, sense entendre realment el que estan fent, i per tant, sense poder tenir un esperit crític sobre els resultats obtinguts.

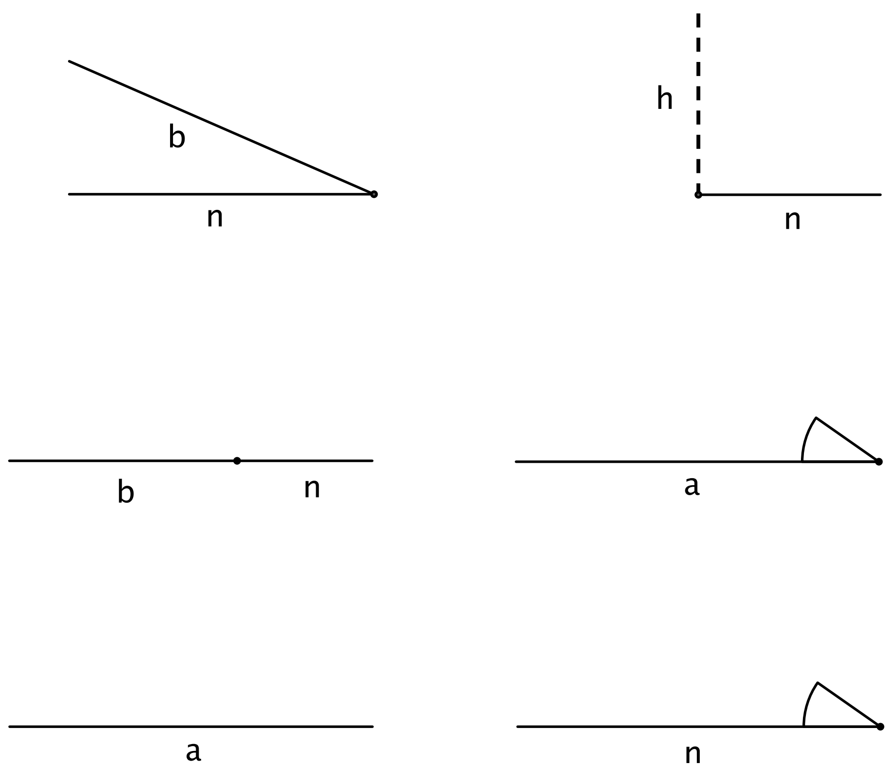
Abans d'entrar en les primeres explicacions, ja podem buscar la pregunta en la ment dels nostres estudiants. El procés natural de descobriment, explicat anteriorment en l'apartat *3.2.3. Procés històric del desenvolupament matemàtic,* implica preguntar-se en primer lloc, si determinat problema té solució, o fins i tot, si té una sola solució o més d'una.

Per tant, podem començar la introducció d'aquests coneixements en particular, posant l'atenció sobre uns triangles rectangles incomplerts, però donant suficients dades per a la completa resolució d'aquests en alguns casos. La pregunta seria: *És possible completar els següents triangles rectangles? Completa gràficament aquells que tinguin solució.*

Per tant, repartiríem el full de treball a cada alumne abans de començar a explicar la teoria implicada. Deixaríem uns minuts per a que hi treballessin de manera individual, i després uns minuts més per a la discussió per parelles. En acabat, els alumnes sortirien a la pissarra exposant les seves conclusions intuïtives que es discutirien amb tot el grup. Vegem un exemple sobre la introducció als teoremes de l'altura i dels catets per a alumnes de 4art d'ESO:

- És possible completar els següents triangles rectangles? Seguint l'esquema del requadre, completa gràficament aquells que tinguin solució





Els estudiants, sense haver de calcular res, s'enfrontarien a l'essència dels teoremes implicats. S'adonarien de que si és possible resoldre'ls gràficament, vol dir que hi ha unes matemàtiques implicades. De fet, un cop resolts gràficament, se'ls preguntaria quin mètode utilitzarien per a resoldre'ls de manera numèrica. En algun dels casos, haurien d'usar el teorema de Pitàgores, que ja haurien après anteriorment, en altres casos trigonometria, en altres els teoremes de l'altura i dels catets, i en algun cas no hi hauria solució determinada possible.

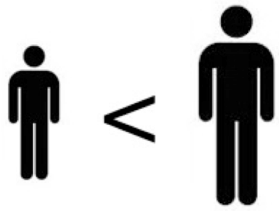
En el cas proposat, que pretén introduir els teoremes de l'altura i dels catets per a 4art d'ESO, ens centraríem en resoldre numèricament aquells casos que els requereixin. Els casos que requereixin trigonometria es recuperarien per a ser treballats posteriorment.

Finalment, i un cop ja vista la teoria, els alumnes tornarien al mateix full de treball per a prendre mides sobre el paper, i comprovar que les solucions gràfiques trobades al principi de tot, es corresponen amb el càlcul numèric.

Exemple 2. Inequacions.

En ocasions, la pregunta adequada ens pot servir per introduir conceptes comuns a la vida quotidiana, que sovint no es saben expressar matemàticament o senzillament no se'ls relaciona amb el llenguatge matemàtic.

Aquest pot ser el cas de les inequacions a 4art d'ESO. En comptes de començar la unitat didàctica definint les inequacions com a desigualtats que expressem de manera matemàtica, i amb uns signes determinats, la qual cosa pot semblar molt llunyana a la del món real, podem començar preguntant: *Ja sabem que el concepte d'equació ens resulta molt més familiar que no pas el d'inequació. Però vosaltres realment, què creieu que són més comunes en el món que vivim, les igualtats o les desigualtats?* Amb aquesta pregunta estem dient de manera implícita que així com les equacions que ja coneixen són igualtats, les inequacions són desigualtats. No em hagut de donar la definició encara. A la vegada, la pregunta els invita a buscar exemples d’inequacions, quan encara no hem explicat el concepte de manera explícita. A més, la pregunta permet generar debat, i el debat permet que cadascun dels alumnes se senti implicat, que tingui la sensació de que té quelcom a dir, de que la conclusió final a la que s’arribarà també depèn de cada un d’ells.



Imatge 3. Simbologia de les inequacions

Un cop explicat el concepte, faríem una breu explicació gràfica i intuïtiva sobre el conveni dels signes, tal com la que apareix en la imatge 3, i procediríem a posar alguns exemples de d’expressions comuns de la vida quotidiana que ells haurien de traduir al llenguatge matemàtic com a inequacions.

Per exemple: *Les dues terceres parts del comerç mundial d'aliments va a parar als països desenvolupats, que representen el 20% de la població mundial*

$20\% = 1/5$; $2/3 > 1/5$; $10/15 > 3/15$

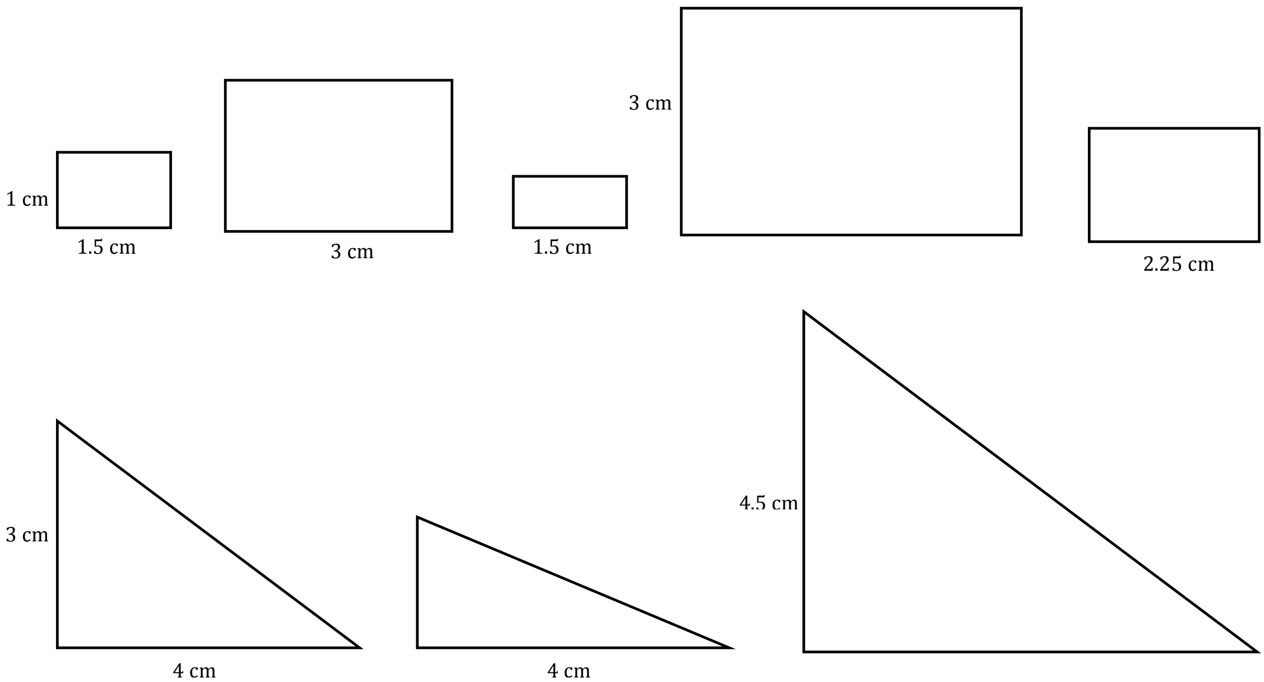
D’aquesta manera podem introduir un concepte estrany que pot provocar un cert rebuig, d’una manera intuïtiva, i amb la participació dels alumnes des de un bon principi. Seguidament seguiríem desenvolupant el concepte en més profunditat.

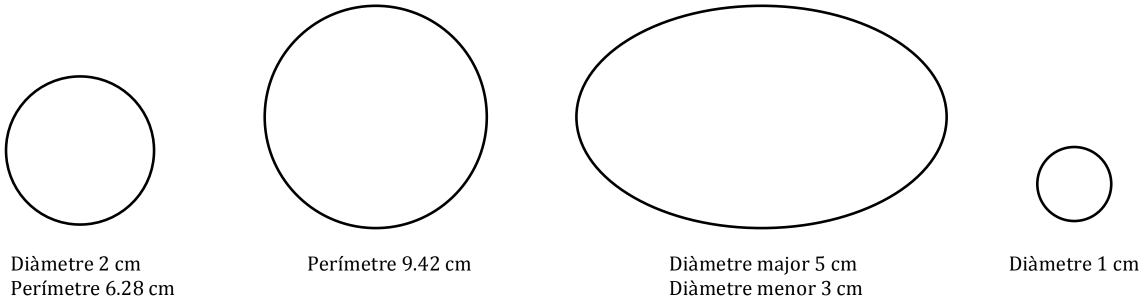
Exemple 3. Figures semblants i el nombre pi

Sovint podem utilitzar les tasques que posem als nostres alumnes per a fer a classe o fins i tot a casa, per a fer-los anar un pas més enllà del que ja saben, però de manera guiada, i sense haver explicat la teoria encara. D’aquesta manera, quan sí exposem la teoria, els estudiants ja hauran arribat per sí mateixos a certes conclusions, o si més no, estaran més receptius, pel fet d’haver afrontat la problemàtica personalment.

Veiem cóm podríem introduir el concepte de semblança de figures, les regles de tres, i el nombre pi a través d’un exercici guiat per a 1er d’ESO.

- Quines figures són semblants? Ens permet aquesta semblança completar les dades que falten? Completa les dades que falten quan això sigui possible





- Creus que és possible que hi hagi dos cercles que no siguin semblants? Hi ha alguna relació que sigui sempre constant en tots els cercles? Quin valor té aquesta constant?

Deixaríem una estona per a treballar de manera individual, una altre estona per a comentar en parelles, i altre cop la pissarra per a la discussió amb tot el grup, i per extreure les conclusions finals.

Altre cop, hauríem introduït conceptes nous, de manera implícita utilitzant les preguntes adequades. Val la pena notar, que els exercicis guiats tenen molta utilitat quan els usem abans d'explicar la teoria, no tant quan aquesta ja ha estat explicada. En aquest últim cas ens interessa més proposar problemes de pregunta única, com ho solen ser els de la vida real. La capacitat final dels nostres alumnes per a resoldre aquest tipus de problemes determinarà el grau de competència adquirida.

Exemple 4. Trigonometria

Quan plantegem exercicis de consolidació per tant, la finalitat serà confrontar l'alumne amb la realitat de la vida quotidiana. En aquesta, normalment quan ens enfrontem a un problema, tenim un objectiu concret, però diverses maneres d'afrontar-lo. A més, generalment no se'ns proporciona la informació precisa que necessitem, sinó que n'hem de descartar alguna dada, i buscar-ne d'altres. Finalment, sovint la resposta que trobem al problema està compresa dintre d'uns paràmetres que considerem correctes, i que són suficients. Sovint una estimació és suficient. Però aquesta estimació ha de ser calculada, i s'ha de disposar de les eines necessàries per al seu càlcul.

Una manera de posar de relleu totes aquestes característiques dels problemes de la vida quotidiana, és plantejar problemes de pregunta única, sense proporcionar la informació necessària per a la seva resolució, i permetent que els alumnes l'hagin de buscar per ells mateixos. A la vegada, si els fem treballar en grup, els alumnes hauran d'arribar a un consens sobre quin mètode utilitzar, i els coneixements dels uns aportaran als dels altres, aprofitant totes les avantatges del treball col·laboratiu que ja hem anat comentant.

Un exemple per a posar en ús els coneixements de trigonometria per alumnes de 4art d'ESO, podria ser plantejar la següent pregunta:

- Quina és l'alçada de la torre més alta de la Sagrada Família? En grups de 4, i sense l'ajut de cap estri, feu una estimació efectuant treball de camp

En aquest cas, els alumnes poden usar diferents dades per obtenir una solució mitjançant la trigonometria, o el teorema de Tales fins i tot. El cert és que difícilment els resultats seran iguals per a cada grup, però el que ens importa és haver usat el mètode adequat. A més, com que la dada sol·licitada es pot conèixer fàcilment fent una mica de recerca per internet, podem en última instància valorar la validesa de la nostre estimació.

La varietat de resultats obtinguts, producte de les diferents maneres de fer, i de la imprecisió de les dades, facilita el debat de tot el grup al comparar resultats i haver d'explicar quin camí s'ha seguit.

Exemple 5. Derivades

Altre cop, tenim un exemple en el que hem de decidir en quin moment introduïm una definició, o si ho fem de manera implícita o explícita. El nostre objectiu final, serà que els alumnes sàpiguen aplicar les derivades per a resoldre problemes d'optimització, entre d'altres. Però si el concepte de derivada no està clar en les seves ments, l'aplicació pràctica d'aquestes els pot portar, en primer lloc, a multiplicitat d'errors, i en segon lloc, a l'oblit absolut un cop superada l'avaluació. Com a conseqüència els alumnes poden acabar el curs sense haver assolit les competències esperades.

Per evitar això, podem posar a treballar els nostres alumnes sobre conceptes propers que ja coneixen, i proporcionar la informació referent al nou contingut matemàtic, només com a resposta precisa a una pregunta que els haguem plantejat i que ells ja hagin resolt de manera estimativa.

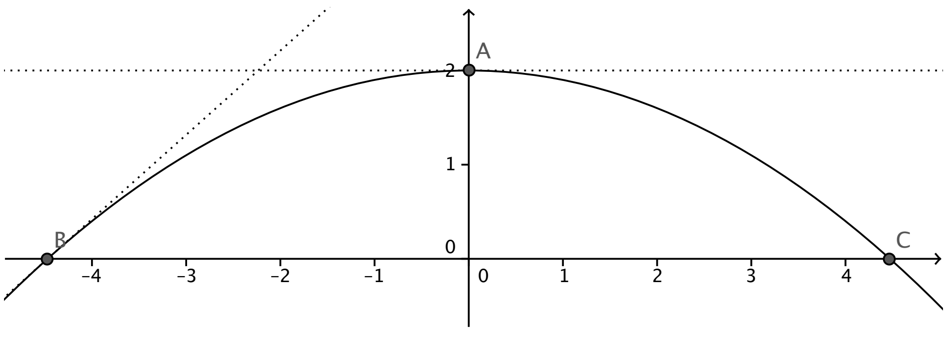
Exemple per a introduir el concepte de derivada als alumnes de 1er de Batxillerat:

- Quina inclinació o pendent agafa el motorista, en el seu punt més alt? I en el seu punt més baix? Fes una estimació numèrica del seu valor, mitjançant l'estudi de la seva trajectòria en el pla cartesià, aproximant-la a una funció.

Imatge 4. Salt amb motocicleta. La trajectòria descriu una paràbola

L'estudiant hauria d'arribar a una representació semblant a la que es mostra a baix, que correspon a la paràbola d'equació (considerant el terra sobre l'eix de les x):

$$y = \frac{x^2}{10} + 2$$



En aquest moment, l'estudiant és conscient de que la pendent en el punt més alt és igual a zero, i a la vegada pot veure factible fer una aproximació de la pendent en el punt més baix, a partir de calcular la pendent d'una recta secant a la funció, que talli en dos punts aproximadament equidistants al punt de contacte de la recta tangent.

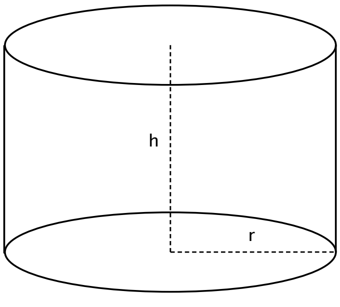
Fet aquest esforç, els nostres estudiants estan preparats per a conèixer la manera precisa d'aconseguir el mateix, i quin és el seu significat. Podem anunciar en aquest moment la definició de derivada en un punt com el valor de la pendent de la recta tangent en aquell punt. A la vegada, no ha d'estranyar a ningú la idea de que aquest valor sigui zero en el punt més alt, que en aquest cas anomenarem màxim. Finalment l'estudiant estarà preparat per comprendre, que la possibilitat de saber en quin punt la pendent d'una funció és igual a zero, ens permet conèixer per a quina x la y és màxima o mínima, i la utilitat que això té en els problemes d'optimització, si som capaços de trobar la funció que descrigui el problema.

Exemple 6. Desenvolupament de cossos geomètrics

Per a consolidar els coneixements sobre el desenvolupament de cossos geomètrics i les seves aplicacions, altre cop intentarem formular una pregunta corresponent a un problema de la vida real. Com hem dit abans, normalment necessitem saber una sola cosa, que haurem d'esbrinar a través de certs passos, que l'alumne en aquests moments ja ha de tenir interioritzats si esperem que hagi assolit les competències bàsiques, és a dir, que sàpiga posar en pràctica els seus coneixements.

En aquest cas proposem un exercici de pregunta única per a 3er d'ESO:

Imatge 5. Sitges cilíndriques



Imatge 6. Geometria del cilindre
Perímetre de la base = $2\pi \cdot r$

- Quant de temps tardarem en pintar deu sitges cilíndriques de diàmetre 3/5 de l'alçada, si sis d'elles mesuren 5 metres d'alçada i la resta 6, tenint en compte que per a pintar 10 m^2 tardem una hora?

L'estudiant haurà de saber aplicar els seus coneixements de geometria referents al cilindre, i seguir una sèrie de passos que el conduiran a la resposta al problema. Ell mateix haurà de determinar quins són aquests passos. En aquest moment no ens interessa guiar aquest procés amb preguntes de l'estil: a) Calcula el diàmetre de les bases, b) Calcula els seus perímetres d'acord amb els seus diàmetres, c) Calcula el total de les àrees d'acord amb els perímetres de les bases i les seves alçades, i finalment d) Quant de temps tardarem en pintar les sitges? No. Al món real l'estudiant es trobarà amb la última pregunta i unes poques dades.

L'estudiant ja té els coneixements suficients de geometria per a resoldre el problema. Ara el que volem, és que hi sàpiga trobar les seves aplicacions. Si el guiem fins l'últim moment, estarem evitant que mai pugui caminar sol. Aquest és el moment idoni per a que l'estudiant aprengui a raonar de manera independent, doncs encara estem a temps d'ajudar-lo si així ho requereix.

4. RESULTATS

4.1. Aplicació en context real. Centre de pràctiques

Un factor fonamental per a qualsevol proposta que busqui la millora sobre la situació actual de l'ensenyament de les matemàtiques, és que pugui ser portada a la pràctica a les aules i dels seus resultats se'n derivin conclusions.

Durant el pràcticum realitzat en el context real d'un institut d'ensenyament secundari, amb un grup ordinari de 4art d'ESO, he pogut aplicar els conceptes anteriorment descrits al llarg del desenvolupament d'una unitat didàctica, des de la introducció inicial, fins l'avaluació final.

Des de bon principi vaig plantejar una pregunta que seria objecte d'un treball que s'aniria fent durant el transcurs de tota la unitat didàctica. Aquesta pregunta, que no seria contestada el primer dia de classe, sí que marcaria l'objectiu de la pròpia unitat. Des del mateix començament, es posava de relleu el valor de tots els coneixements teòrics que esperaven als alumnes amb un objectiu clar.

Paral·lelament, aquests coneixements s'anirien introduint mitjançant altres preguntes sempre que això fos possible. Aquestes preguntes servirien per a despertar la intuïció dels alumnes i per a generar debat. L'objectiu principal era que la introducció del coneixement nou, i les seves explicacions, mai es produïssin 'en fred'. La voluntat era que abans de donar cap explicació, els alumnes haguessin pogut pensar-hi una estona. Això ho propiciava la pregunta. Així s'intentava evitar la falta de comprensió en l'explicació, d'una banda, i la falta de retenció d'una altre.

En alguns casos, la pregunta es feia amb la intenció expressa de guiar la seva intuïció fins a la conclusió apropiada. En d'altres, l'objectiu era simplement posar de manifest una conclusió errònia per part dels alumnes, i així crear l'expectativa necessària, abans de donar l'explicació pertinent.

A continuació es detalla el procés d'aplicació d'aquesta metodologia en el desenvolupament de la impartició de la unitat didàctica, que va durar 12 sessions i no va alterar la programació del centre, ni va impedir que es pogués considerar la totalitat del temari del curs.

4.1.1. Impartició d'unitat didàctica. Estadística unidimensional i bidimensional per a 4art d'ESO

Després d'una breu introducció personal, vaig començar la unitat didàctica amb una pregunta:

- ***Què és per a tu l'estadística?***

L'objectiu d'aquesta pregunta era doble. Es pretenia introduir en el grup des d'un bon principi el clima necessari per a portar a terme tota la unitat fent preguntes i generant debat. Era molt important que de bon principi entenguessin el que jo els demanava, el que jo acabaria valorant d'ells. Volia que entenguessin que la meva intenció era fer-los raonar, que qualsevol cosa que em diguessin, em semblava digne de ser tinguda en compte, i de ser reflexionada. Volia que entenguessin que el temps no era tant important, que el que jo volia no era avançar temari, sinó fer-los pensar. Evidentment, de la meva part depenia després que el temps dedicat a aquesta unitat fos raonable, i que permetés poder fer un curs en la seva totalitat al mateix ritme. Però d'això jo no volia que els alumnes en sabessin res.

Per tant, l'esperit de pausa, de raonament, de debat, havia de ser implantat des del mateix principi. A la vegada, aquesta pregunta em servia per demanar als alumnes que es presentessin personalment per a que jo també els pogués conèixer. Així doncs, un per un, i de manera individual, m'havien de dir el seu nom, i explicar-me què era per ells l'estadística.

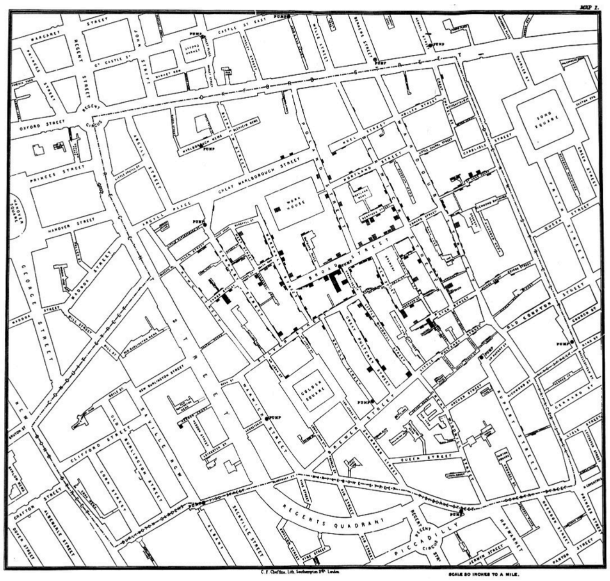
L'altre propòsit de la pregunta era treure diferents idees de tot el col·lectiu d'alumnes de la classe, que servirien per a trobar una definició complerta sobre el significat de l'estadística. I així va ser. Entre tots vàrem poder arribar a una bona definició d'estadística, a saber: la ciència que recull, analitza i interpreta les dades d'un conjunt d'elements. Evidentment, pel mig, moltes altres concepcions confoses varen haver de ser descartades.

La següent pregunta, lligada a la primera era:

- ***Per a què serveix l'estadística?***

En aquest punt, la meva intenció era destacar el valor científic de l'estadística. Que l'important, a vegades, no és fer suposicions, sinó buscar dades, analitzar-les, i interpretar-les. Així es podia entendre millor el significat d'aquest procés.

Seguint l'exemple de la primera classe sobre estadística del propi màster, a càrrec d'en Pere Grima, i que vaig poder viure com alumne, vaig destacar el paper fonamental de l'estadística en el cas de la fi del brot de còlera a Londres l'any 1854. John Snow va deixar d'especular, i va prendre una actitud científica en front un problema greu. Va reunir dades, que el varen portar a trobar la causa, la font a Broad Street, Soho. Sobre un mapa de la zona afectada del centre de la ciutat va anar marcant amb ratlles els casos de còlera que s'anaven produint a sobre del lloc de l'incident. Aquest mètode el va portar a trobar la causa, i acabar de cop i volta amb les teories de l'època sobre el com i el perquè del contagi de la còlera. A partir d'aquest moment, tot i no haver descobert el perquè, ja es podia iniciar una investigació científica guiada, orient-tada, basada en fets.



Imatge 7. Mapa usat per John Snow que va servir per a detectar l'origen del brot de còlera a Londres del 1854

Finalment, i amb l'objectiu de causar una impressió indeleble en la ment dels estudiants sobre la utilitat de l'estadística i del mètode científic, vàrem reproduir una situació a classe en la que quedaria evident que les dades han d'anar per davant de les suposicions, i que l'evidència pot orientar els esforços que fem per a entendre i explicar certes situacions o fenòmens.

Per a demostrar això vàrem reproduir el 'joc de les tres portes', o problema de Monty Hall, tal com havia fet en Pere Grima a la sessió del màster. El joc consisteix en tres portes darrere de les quals hi ha un premi. Només una d'elles té un premi significatiu. Les altres dues ofereixen premis irrellevants. Quan el concursant està a punt d'obrir una de les portes per veure si li ha tocat el premi, en aquell mateix moment se li ofereix canviar, però abans, se li obre una altra de les dues portes que queden, elegida de tal manera que en aquella en concret no hi hagi cap premi. La pregunta és:

- ***Cóm tinc més probabilitats de guanyar el premi, si canvio o si no?***

Aquesta pregunta no està feta amb la intenció de que els alumnes utilitzin la seva intuïció per a arribar a la solució correcte. L'experiència demostra que només entre un cinc i un deu per cent de les persones encerten aquesta pregunta. Per tant, en aquest cas el valor de la pregunta està en deixar als estudiants en una situació de perplexitat que els faci estar anuents a conèixer la verdadera resposta. Com he explicat anteriorment: servia per a crear l'expectativa necessària, abans de donar l'explicació pertinent.

Però abans, havia de demostrar a la majoria, que encara que ho tinguessin molt clar que tant donava canviar com no canviar, la resposta correcta era que canviar és millor. Per a tal fi, vàrem simular el joc de les tres portes utilitzant una baralla de naips repartida per tota l'aula per parelles. Cada parella havia de simular el joc durant una estona. Un alumne mostrava el revers de tres cartes al seu company com si es tractés de les tres portes, mentre que l'altre havia de procurar endevinar en quina d'elles hi havia el premi, és a dir, quina de les cartes era diferent. Quan ja n'havia escollit una, l'alumne que tenia les tres cartes oferia a l'altre l'opció de canviar la seva elecció. Els resultats s'anaven apuntant segons quatre possibilitats: canvia i guanya, no canvia i guanya, canvia i no guanya, no canvia i no guanya. Finalment jo els apuntava a la pissarra. En aquest moment quedava clar, que després d'unes cent simulacions, guanyaven els que canviaven amb certa claredat.

Finalment, amb un full de càlcul prèviament preparat vàrem fer unes 1000 simulacions en un moment, que varen demostrar que la relació entre encerts i desencerts era de 2/3 contra 1/3 Emfatitzant el valor de l'estadística, quedava clar que les dades no enganyaven, i que a partir d'aquí podíem intentar entendre els perquès. A més, quedava demostrada la diferència entre estadística i probabilitat.

Els alumnes es varen agafar l'experiència amb molt d'entusiasme, i tots varen participar, tant en aventurar si era millor canviar o no canviar, com en oferir les dades que ells havien obtingut en el joc, i donar la seva opinió. La sensació que vaig tenir era de que s'ho havien passat bé, i de que havien estat expectants per a conèixer el desenllaç i la resposta a la pregunta.

Aquella mateixa primera sessió, abans d'acabar, vaig introduir la pregunta que seria el tema d'estudi de totes les sessions posteriors:

- ***De quin peu calça el professor?***

Al llarg de les sessions, els alumnes anirien completant una taula en un full de càlcul, al qual anirien introduint les formulacions que aniríem veient, que els portarien finalment a poder esbrinar el número de sabata del professor, jo mateix en aquests cas, en base a la relació entre les seves pròpies dades.

Em semblava important que de bon principi entenguessin el valor pràctic de tot el que es disposaven a aprendre, i que culminaria amb un joc per grups, per tractar de fer una estimació sobre el meu número de sabata. Cada grup faria la seva estimació en funció d'una variable diferent, i l´últim dia haurien de fer una breu exposició pública explicant el valor de la seva estimació, i fins quin punt aquesta era fiable.

En aquest cas, la formulació de la pregunta des de l'inici, tenia com a propòsit crear expectació i donar sentit a tot el que aniríem veient, en contraposició a l'opció d'anar explicant teoria i acabar veient al final la seva utilitat.

A partir d'aquest moment havia de començar a introduir tota la teoria. El primer concepte que volia repassar era el de les mesures de centralització com la mitjana aritmètica, la moda i la mediana. Vaig posar un exercici de deures basat en un exemple de notes d'examen fictícies, seguint el model utilitzat pel propi centre, on en la capçalera s'indicava la nota màxima, la mínima i la mitjana de tota la classe. Es demanava el següent:

Les qualificacions obtingudes en el darrer examen de matemàtiques han estat les següents:

Nombre d'alumnes	2	5	8	3	2	1	4
Qualificació	3	4	4.5	5	5.5	6	10

Suposant que la teva nota ha estat un 5:

- Completa la capçalera de l'examen amb les dades que falten
- Quina opinió creus que pot tenir una tercera persona sobre la teva qualificació veient les dades que apareixen a la capçalera?
- Quins arguments utilitzaries per a convèncer algú de que la teva qualificació no és pas dolenta?

<table>
<tr><td colspan="2">FULL DE PREGUNTES I RESPOSTES
PROVA núm. 5 de MATEMÀTIQUES
4t d'ESO B

DATA: 1 de març de 2013</td><td colspan="2">SIGNATURA FAMÍLIA</td></tr>
<tr><td colspan="3">NOM</td><td>NOTA</td></tr>
<tr><td>MITJANA GRUP</td><td colspan="2">NOTA MÀXIMA GRUP</td><td>NOTA MÍNIMA GRUP</td></tr>
</table>

El dia següent es va generar un debat entorn aquestes preguntes. Molts varen participar. Es tractava de que veiessin que en aquest cas, la nota de l'alumne estava per sota la mitjana, però que a l'hora era superior a la majoria. Per tant, quedava clar el valor de descriure una situació en base a diferents mesures de centralització.

En aquest cas, era important formular aquestes preguntes abans d'explicar el significat de les pròpies definicions de *moda* o *mediana*. Així s'aconseguia que els alumnes ja estiguessin pensant en aquests conceptes abans d'explicar-los. A més, en aquest cas els conceptes no eren totalment nous, doncs ja s'havien vist en cursos anteriors.

Per a ressaltar el valor del concepte *moda,* en aquest cas es va fer una prova a la mateixa classe, apuntant a la pissarra el color dels pantalons o de la faldilla de cada alumne. Finalment, quan es preguntava, 'quin color està més de moda?' el concepte quedava ben clar.

El següent concepte que havia d'introduir eren les mesures de dispersió. Altre vegada vaig utilitzar l'estratègia de posar uns deures en forma de pregunta, per a que els estudiants anessin pensant la resposta abans de que jo l'expliqués. Sense haver definit el que significa *dispersió,* els oferia una taula, i els preguntava:

- ***Calcula la mitjana aritmètica de cada una de les següents sèries numèriques, i digues: Quina té més dispersió? Hi hauria manera de quantificar-la?***

3	3	3	3	3
2	3	3	3	4
1	2	3	4	5
0	3	3	3	6

El dia següent, a la correcció dels deures, un alumne em va preguntar, 'què vol dir dispersió?' És clar, jo havia demanat quelcom que ells no sabien. No obstant, a aquesta pregunta vaig respondre tornant-li la pilota, i portant fins a les últimes conseqüències el que ha estat motiu del meu treball. Senzillament li vaig respondre: 'què en penses?', 'què creus tu que vol dir dispersió?' L'alumne va respondre amb uns gestos manuals que expressaven el que ell entenia per dispersió. Li vaig dir: 'efectivament, això és la dispersió', i utilitzant els seus mateixos gestos vaig explicar a tota la classe el que volia dir *dispersió.*

Aquesta és una demostració de que moltes definicions poden ser obviades inicialment, o explicades de forma implícita, especialment quan es relacionen directament amb conceptes que utilitzem en la vida quotidiana. Un altre bon exemple d'això és el concepte de pendent, i la seva formulació en matemàtiques, com he explicat anteriorment en l'exemple sobre la introducció de les derivades.

En el cas de les sèries numèriques, tots els alumnes veien clarament que la mitjana aritmètica de totes elles era la mateixa, és a dir, 3. En canvi, la seva intuïció els va portar a concloure unívocament que la última de totes era la que tenia més dispersió. Però cóm podrien quantificar numèricament aquesta dispersió?

Cóm podien justificar la seva resposta? Cóm podien demostrar que tenien raó quan deien que la última d'elles era la que tenia més dispersió?

Els alumnes veien evident que si sumàvem les diferències de cada valor de les sèries respecte de les seves mitjanes, el valor final seria zero en totes elles. No en va era les mitjanes. Què més podíem fer per a expressar de manera numèrica les seves dispersions?

Vàrem estar analitzant les quatre sèries a la pissarra, examinant-les totes a l'hora, fins que els alumnes varen arribar a la conclusió de que si fèiem el valor absolut d'aquestes diferències, podríem acabar sumant-les i d'alguna manera quantificar la dispersió. Un cop 'descobert' això, els vaig dir que acabaven de donar amb el que anomenem *Desviació Mitjana.* Així i tot, la desviació mitjana de les dues últimes sèries seguia essent igual, no aportava cap diferència. No obstant, els alumnes seguien pensant que la última de totes tenia més dispersió. Els vaig preguntar 'quina altre operació matemàtica podríem aplicar que causés una diferència entre les dues sèries?'

En aquest cas no vaig aconseguir que ningú arribés a la conclusió buscada, és a dir, que els quadrats de les diferències ens podien fer servei. Personalment, i pensant en retrospectiva, crec que encara els hagués pogut guiar una mica més amb altres preguntes per a que arribessin ells mateixos. No va ser aquest el cas, i jo mateix els vaig oferir la solució. Així i tot, vull ressaltar, que el fet d'haver llençat la pregunta, i haver-los deixat pensar una estona, i que parlessin entre ells, crec que va facilitar la comprensió de l'explicació següent, i la seva memorització. No obstant, com he explicat anteriorment, segueixo pensant que és molt important anar en compte a l'hora d'oferir els reptes apropiats, per a no provocar desànim ens els estudiants.

Tot aquest seguit de preguntes i raonaments, em varen servir per introduir les mesures de dispersió que utilitzaríem en les següents sessions, que bàsicament eren dues, la *variància* i la *desviació típica*.

Per a consolidar els nous conceptes vaig posar uns deures basats altre cop en una pregunta única. Aprofitant les dades que teníem de tots els estudiants, que havíem demanat des del primer dia per a l'exercici final, els vaig demanar: 'quina variable té més dispersió, l'alçada dels nois o de les noies?' Els vaig demanar primer que fessin una taula usant intervals.

En aquest punt els estudiants estaven preparats per entrar en l'estadística bidimensional. Altre cop em vaig servir d'una pregunta:

- ***Per a què em pot servir analitzar dues variables a l'hora?***

Per a què ens pot servir utilitzar parelles de dades? És a dir, analitzar dues variables d'una mostra d'una població, individu per individu? En aquest cas els alumnes varen respondre ràpidament el que jo esperava. Potser en aquest punt, ja entenien que tot això acabaria tenint relació amb la qüestió de fons, a saber, 'de quin peu calça el professor?' Des del primer dia, ja els havia demanat que es prenguessin una sèrie de mides del seu propi cos per a poder acabar fent una estimació apropiada, d'un nou individu, en aquest cas jo mateix. Havíem anat apuntant en un full de càlcul l'alçada, la llargada del peu, l'amplada del peu, el pam, l'altura del melic, el perímetre del canell, i per a distreure una mica el nombre de germans... apart evidentment del número de sabata de cadascú.

Imagino que tot això va propiciar la ràpida resposta per part de varis alumnes quan varen dir que analitzar dues variables a l'hora ens permetria fer prediccions o estimacions. A la vegada això em va servir per introduir subtilment el concepte de *correlació*. Si un individu de metre vuitanta d'alçada sol tenir el peu més gran que un de metre cinquanta, en diem que hi ha alguna *correlació* entre una variable i l'altre en la població d'humans. Estava clar.

Altra qüestió era no obstant, la formulació pertinent. No és un procés excessivament intuïtiu el que ens porta al càlcul d'aquesta *correlació*, o al que anomenem *coeficient de correlació lineal de Pearson*. Així doncs, en aquest cas vaig decidir oferir la fórmula directament, després d'haver-se entès el concepte. Així i tot, la comprensió del concepte abans de la formulació considero que és un pas fonamental, doncs d'aquesta manera, els alumnes sempre tindran un esperit crític amb el resultat. El resultat no podrà mai contradir la lògica de la seva definició.

Per tant els vaig dir que aquesta correlació era mesurable mitjançant el que anomenem coeficient de correlació lineal de Pearson:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

El denominador ja era conegut, doncs eren les desviacions típiques. El numerador no ho era pas. Això em va servir per introduir el concepte de *covariància*. Altre cop, el concepte era relativament senzill d'entendre, doncs estava relacionat amb la variància, que ja era coneguda. Però la seva formulació tampoc era massa intuïtiva. Després d'explicar la relació entre la variància i la covariància, vaig procedir a oferir la formulació:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{N}$$

En aquest punt, però, tenia una altre pregunta preparada per fer-los tornar a ser protagonistes i sentir que la classe l'estàvem fent entre tots:

- ***Entre quins valors es podrà trobar la r?***

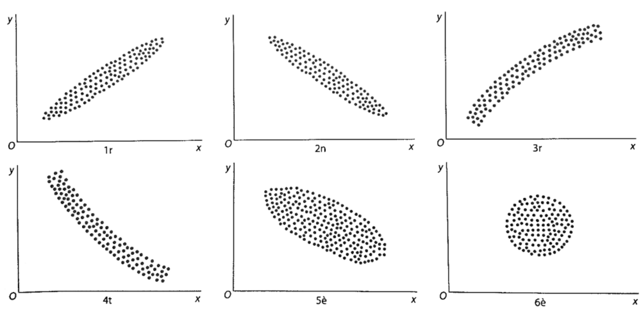
Després de mencionar que el valor absolut del denominador mai és inferior al del numerador en aquest cas, parlant de la correlació, els vaig llençar aquesta pregunta.

Era una pregunta senzilla, que varen contestar correctament, però que tenia la seva importància. No només em permetia reenganxar-los en la discussió i en la dinàmica mantinguda fins el moment de pregunta, intuïció i debat, sinó que també em servia per a posar en boca d'ells un concepte essencial. La meva intenció era que sempre poguessin recordar aquest fet, i així poguessin mantenir un esperit crític a l'hora d'interpretar resultats. De fet aquesta pregunta va ser motiu d'avaluació en la prova individual que els vaig proposar cap al final de la unitat didàctica, com explico més endavant.

D'aquesta pregunta se'n desprenien d'altres, com ara:

- ***Què vol dir una correlació alta, propera a 1, o una de baixa, propera a zero?***

Els estudiants enseguida em varen contestar que una correlació alta era aquella que ens permetria fer pronòstics.



Imatge 8. Imatge extreta del llibre de Matemàtiques de 4art d'ESO de Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-2008

Tot seguit els vaig projectar unes imatges d'uns núvols de punts, o diagrames de dispersió, per a explicar-los cóm definiríem cada situació. Però de nou, en primer lloc vaig formular la pregunta.

- ***Cóm definiríeu la correlació de cada una de les següents situacions?***

Ells tenien que posar nom a les imatges, oferir una descripció. Després jo els donaria la descripció comunament acceptada.

Com a deures pel dia següent, els vaig demanar que calculessin les correlacions, és a dir les *r,* de les següents dues taules, les comparessin, i dibuixessin els núvols de punts. La intenció no era només que practiquessin els conceptes recentment apresos, sinó fer-los caminar sols part del trajecte que suposaria la teoria que pensava introduir el sia següent.

Aquestes dues taules, que són semblants, tenen de peculiar que la de la dreta es tracta d'una recta, i la de l'esquerra no exactament. Aquest exercici posa de manifest que la taula de la dreta té correlació *r=1,* mentre que l'altra simplement té una correlació forta. Al fer-los dibuixar els núvols de punts respectius, aquests aspectes quedarien plenament evidents.

X	Y
1	2
4	3
6	5
9	6

X	Y
1	2
3	3
7	5
9	6

El dia de la correcció, vaig demanar a un parell d'alumnes que calculessin la correlació de cada una de les dues taules, i que dibuixessin els núvols de punts a la pissarra. Aleshores vaig preguntar a tota la classe, què succeïa en el cas de la dreta, i em varen contestar que es tractava d'una recta.

En aquest moment, vaig demanar a l'estudiant que havia fet l'última part que dibuixés la recta en el núvol de punts corresponent. Després li vaig demanar que unís els punts de l'altre gràfic, els que corresponien a la primera taula. Quedava clar, que no traçaven una recta, però que hi havia una tendència molt clara. Aleshores la pregunta va ser:

- ***Creieu que es podria traçar una recta que reflectís la tendència que percebem en aquest núvol de punts?***

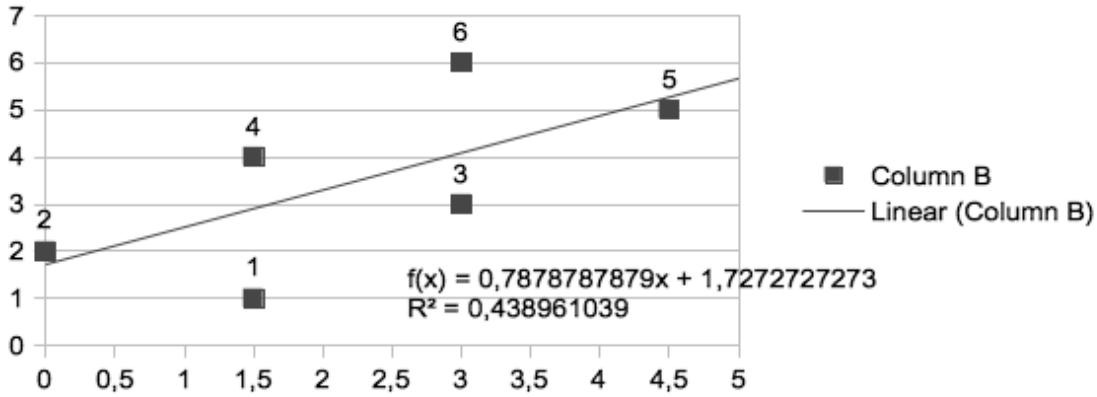
L'alumne que encara estava a la pissarra va ser l'encarregat de fer la prova. A continuació els vaig dir: 'Doncs bé, aquesta és la línia de tendència, o el que anomenem també *recta de regressió'*. Altre cop els estudiants havien pogut arribar al concepte per ells mateixos, guiats per preguntes i exercicis dissenyats a l'efecte, sense haver de ser exposats primer a la teoria, o a la definició dels termes.

Tot seguit, els vaig fer una pregunta capciosa. En aquest cas però, el propòsit no era que arribessin ells mateixos, sinó, com en el cas del joc de les tres portes mencionat anteriorment, provocar perplexitat, i així avivar l'anhel per escoltar la resposta correcta. La pregunta escapava totalment la capacitat dels alumnes de donar amb una resposta encertada, però els faria pensar:

- ***Creieu que és la mateixa, la recta de regressió, si vull conèixer la 'y' en funció de la 'x', que si vull conèixer la 'x' en funció de la 'y'?***

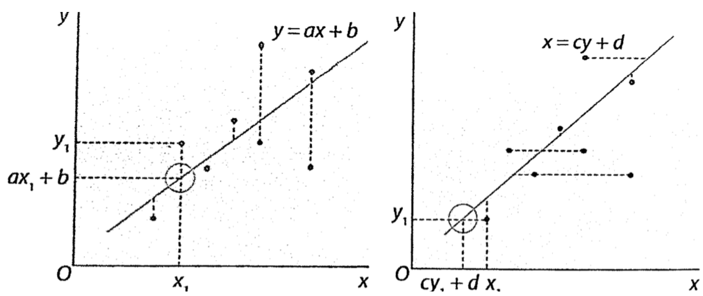
Molts alumnes no varen donar resposta, d'altres varen contestar que *sí,* que era el mateix. Aquesta era la resposta esperada. Aquesta reflexió, em permetia posar de manifest que hi ha una diferència entre ambdues rectes. Sense la pregunta, la meva explicació, crec hagués caigut en sac foradat. Aquest punt em semblava important, ja que volia que els alumnes tinguessin clar quina recta era la que els interessava calcular quan volguessin fer un pronòstic o una estimació.

Per a ressaltar encara més el valor de la pregunta, i el de la resposta següent, vaig dibuixar a la pissarra uns punts, amb una certa intencionalitat, com es mostra en el gràfic de la imatge 9. Els vaig preguntar, per on dibuixarien ells la recta de regressió? En aquest cas, donada la dificultat i el propòsit de la pregunta, no vaig fer sortir ningú a la pissarra a fer l'intent. Els alumnes em varen contestar que la recta de regressió havia de passar pel bell mig del núvol que formaven els punts que jo havia dibuixat. Semblava evident, però no era així, com es pot veure a la imatge 9. Quant més clar els semblés que la seva resposta era correcta, més impacte els causaria després conèixer una bona resposta.



Imatge 9. La recta de regressió de ‘y’ sobre ‘x', no passa pel centre del núvol de punts

Com que la demostració, no obstant tampoc era obvia, vaig passar directament a mostrar una imatge que serviria d’evidència. La imatge mostrava per separat les dues rectes de regressió, en base a ‘y’ i a ‘x’, d’un mateix núvol de punts. Es veia clarament, tant, en funció de quines distàncies es calculava cadascuna, com el fet de que les rectes no eren la mateixa.



Imatge 10. Imatge extreta del llibre de Matemàtiques de 4art d’ESO de Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-2008

La intuïció, no obstant, sí que serviria per a respondre a la següent pregunta:

- ***Què creieu que passa quan la correlació és igual a 1? I quan és igual a 0?***

En aquest cas els alumnes sí varen respondre de manera correcta. Varen ser capaços d’intuir que una correlació igual a 1 implicava que les rectes de regressió de ‘y’ en funció de ‘x’, i de ‘x’ en funció de ‘y’ eren la mateixa, i que de fet els mateixos punts ja dibuixaven aquesta recta si els uníem. Per tant era absurd calcular la recta de regressió en tal circumstància, doncs teníem una relació funcional, i no estadística. De la mateixa manera varen intuir que quan la correlació fos zero, el cas d’un núvol de punts circular, aquestes rectes serien perpendiculars.

Un cop entès clarament el concepte de *recta de regressió*, els alumnes estaven preparats per aprendre a calcular-la. Ja havien entès totes les implicacions. Ara els esperava la formulació. La recta de regressió havia de passar pel punt mig de les ‘x’ i de les ‘y’, i tenir una determinada pendent *m.*

$$m = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

A partir d’aquí les dues rectes es podien definir:

$$y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x}) + \bar{y}$$

$$x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} \cdot (y - \bar{y}) + \bar{x}$$

Després de practicar una mica aquests conceptes, els alumnes ja estaven en disposició d'aplicar tot el que havien après durant la unitat didàctica. Els vaig donar les meves dades, i els vaig preguntar altre cop:

- ***De quin peu calça el professor?***

Per grups de 4, i usant el full de càlcul que havien anat elaborant amb tota la formulació, sessió rere sessió, havien d'arribar a la recta de regressió, i després saber què fer amb ella, i què fer amb les meves dades.

Cada grup tenia assignada una variable concreta que varen utilitzar per al càlcul del meu número de sabata. En acabar, van anar sortint a la pissarra a explicar a quina conclusió havien arribat, quin havia estat el procés, i si els semblava que l'estimació en funció de la variable utilitzada era prou bona o no. Així es va poder comparar els resultats obtinguts amb cada variable.

Els estudiants podien tenir una visió global del que havíem anat fent, i per a què servia cada cosa. Ja no necessitaven que jo els guiés tot el procés per a donar resposta a la pregunta plantejada, amb passos intermedis marcats. Era el moment de la veritat, el de la consolidació.

Així i tot, i tenint en compte que l'examen seria individual, i que a més es realitzaria a llapis, paper i calculadora, és a dir, sense el full de càlcul, el dia abans de la prova individual vàrem fer una sessió sencera que va consistir en resoldre un altre exercici de pregunta única amb la participació forçosa de tothom. La pregunta en aquest cas era:

- ***En base al total de punts de tots els equips de les lligues de futbol dels darrers anys, i dels punts amb els que s'havia salvat l'últim equip, quants punts farien falta per a la salvació enguany?***

Utilitzant les taules que publica la LFP a internet, vàrem realitzar el procés entre tots. Abans de donar cada pas, preguntava als alumnes què havia de fer. En aquest cas, i en ser el dia abans a la prova, la pregunta la dirigia de manera individual, i en ordre, per tal que tots els alumnes haguessin de participar. Aquest fet va propiciar que tothom estigués molt atent i seguint el procés, ja que tots volien estar preparats per quan els arribés el moment.

4.1.2.Avaluació

Durant el transcurs de la unitat didàctica, jo havia intentat que quedés molt clar què era el que m'importava, què era el que esperava d'ells. Havíem anat arribant tots junts a cada conclusió. Havíem debatut sobre pràcticament cada punt. Sabien que no només es tractava de calcular, sinó d'entendre, de tenir criteri. A tal efecte, havia preparat un examen en el que el 60% de la nota sortia de preguntes curtes que demostrarien fins quin punt s'havien entès els conceptes. La prova constava de cinc preguntes curtes que valien un punt cada una, més un exercici de pregunta única de cinc punts, quatre dels quals eren la resolució del problema, i un punt era la interpretació del propi resultat en base a una altre pregunta per a fer pensar.

D'acord amb el document de la Generalitat de Catalunya *Avaluar per aprendre,* "una visió competencial de l'aprenentatge comporta canviar què, cóm, quan i per què s'avalua" [14]. "L'alumnat percep el que és important d'aprendre a partir del que el professorat valora, no tant en paraules, sinó quan proposa activitats concretes per avaluar aprenentatges i quan aplica uns determinats criteris d'avaluació. [...] Si quan realment es valoren els resultats d'un aprenentatge només es comprova si es recorda de forma més o menys literal una determinada informació, l'estudiant considerarà que aquest saber és el que realment compta" [14].

Per tant, l'avaluació pretenia ser un reflex de la metodologia usada durant tota la impartició de la unitat didàctica. El fet de donar un 60% del pes de l'examen a preguntes curtes, preguntes d'entendre, vaig pensar que facilitaria aprovar a aquells alumnes que haguessin estat atents, però que tinguessin dificultats en l'execució. A més, quan els alumnes varen entrar a classe es varen trobar que totes les fórmules vistes durant la unitat didàctica estaven escrites a la pissarra. La meva intenció era senzillament veure si havien entès, i si sabien raonar.

A continuació es mostra les preguntes de l'examen d'estadística per a 4art d'ESO:

1. (1 punt)
   Què és l'estadística i per a què serveix?

2. (1 punt)
   Indica alguna mesura de dispersió que ens permeti diferenciar les dues sèries següents:

1	2	3	4	5
0	3	3	3	6

3. (1 punt)
   Dibuixa un núvol de punts que representi:

   a. Una correlació lineal directa forta
   b. Una correlació lineal directa feble
   c. Una correlació lineal indirecta forta
   d. Una correlació nul·la

4. (1 punt)
   Si faig el càlcul de la correlació entre dues variables i obtinc -1.27, quina interpretació haig de fer? Raona la teva resposta.

5. (1 punt)
   Si en comprar un bolígraf em cobren 1 € i en comprar-ne deu me'n cobren 10, quin tipus de relació tenim, estadística o funcional? Necessitaré calcular la recta de regressió entre les variables 'nombre de bolígrafs' i 'preu' per a fer una estimació de quant em cobrarien si compro 15 bolígrafs? Raona la teva resposta.

6. (5 punts)
   Cinc amics es reuneixen per a comparar les notes que han tret de llengua i de matemàtiques. No obstant un d'ells només ha pogut fer de moment l'examen de llengua ja que el dia de l'examen de matemàtiques estava malalt.

   Les notes en nombres enters han estat les següents:

Nota de llengües	1	4	6	6	9
Nota de matemàtiques	2	3	5	-	6

   Entre el zero i el deu i amb nombres enters, quina nota creus que es pot aproximar més a la nota que finalment obtindrà l'alumne que falta per avaluar, quan finalment pugui fer l'examen de matemàtiques? Creus que és una bona estimació? Raona la teva resposta.

El resultat de la prova va ser el següent:

- **Nota mitjana: 5**
- **Nota màxima: 9,75**
- **Nota mínima: 0,5**
- **Nombre d'aprovats: 12**
- **Nombre de suspesos: 13**

El dia següent a la prova vàrem repetir l'examen a la pissarra, de manera que els alumnes que havien contestat bé a les preguntes anaven sortint a la pissarra a contestar. Els alumnes eren triats d'acord al seu nivell de rendiment general, donant prioritat als que havien obtingut pitjors resultats, però que sí havien contestat bé aquella determinada pregunta.

4.2. Aspectes a destacar

En primer lloc val la pena matisar els resultats de la prova una mica més. Tot i que a simple cop d'ull poden semblar relativament bons pel que estem acostumats, la realitat va ser que en línies general els resultats varen ser força semblants als de qualsevol examen de matemàtiques. No obstant, la nota mitjana va resultar relativament positiva degut a que aproximadament la meitat dels alumnes que varen aprovar, és a dir, un 25% del total de la classe, va treure una nota superior a un 9 sobre 10. Sens dubte, aquest fet va estirar una mica la nota mitjana cap amunt.

En quant a la resta d'alumnes val la pena destacar que la resta d'aprovats varen estar entre el 5, i el 6,75, doncs no va haver-hi cap notable. En quant als suspesos, hi va haver una gradació normal.

Paral·lelament a aquests fets, podríem dir que el desenvolupament de la unitat didàctica tal com l'he exposat utilitzant la metodologia proposada, va ser un èxit. No obstant, analitzant els resultats de la prova, haig de concloure, que probablement, va ser aquest 25% d'estudiants que varen acabar traient un excel·lent, els que em varen ajudar a empènyer les sessions cap a una dinàmica positiva. De fet, abans de l'inici de cada sessió, i també en acabar, jo podia veure un bon grupet d'alumnes engrescats amb els continguts que estàvem veient.

Per tot això, crec que l'aplicació de la metodologia aquí proposada en la meva experiència en un centre de secundària, ha tingut una incidència directa amb uns resultats molt positius per a un 25% dels alumnes. Per a la resta, probablement, res ha canviat, res ha estat diferent.

En quant a la prova pròpiament, em vaig trobar que els alumnes que contestaven bé a les preguntes curtes, eren els mateixos que resolien el problema principal de manera correcta. Com he comentat abans, jo havia plantejat una sèrie de preguntes curtes i força assequibles, sobre aspectes considerats a classe, que em semblaven importants, amb la intenció entre altres coses, de facilitar l'aprovat als alumnes que poguessin presentar més dificultats en el càlcul. No obstant, el resultat no va ser el que jo esperava. Els alumnes amb baix rendiment tampoc van ser capaços de contestar bé les preguntes curtes.

4.3. Propostes de millora

Després d'analitzar el desenvolupament de la impartició de la unitat didàctica i els resultats de la prova, crec que seria important aconseguir implicar a més alumnes en els debats generats.

D’una banda, tinc la sensació de que si hagués pogut continuar treballant amb el mateix grup, més alumnes haguessin respòs positivament, ja que en part, els resultats de la prova em demostren que molts alumnes no varen creure que les preguntes ‘de pensar’ que jo feia durant les classes, podien ser motiu d’avaluació, malgrat que vaig ser força clar des del principi. Degut a això alguns alumnes potser varen pensar que només es tractava d’esperar a que s’acabés el debat per a copiar la fórmula de la pissarra.

Per tant, des de la perspectiva de l’experiència, crec que quan pretenem canviar la manera de fer, o d’avaluar, val la pena ser terriblement explícits amb els alumnes des d’un bon principi. D’aquesta manera, tinc la sensació que més alumnes s’haguessin adaptat a la metodologia que vaig emprar.

D’altre banda, durant la pròpia execució de les classes, crec que val la pena de tant en tant fer un torn de preguntes directes, alumne per alumne. Això només ho vaig fer el primer dia de tots, preguntant què és l’estadística i demanant als alumnes que es presentessin, i el dia abans de l’examen, al fer un exercici entre tots a la pissarra. Crec que tot i que això no es pot fer sempre, s’ha de fer sovint. Em vaig adonar, especialment l’última vegada, de que preguntar de manera individual i per ordre, feia estar atents a tots els alumnes, doncs sabien que el seu torn obligat venia en breu. I això, en l’ensenyament obligatori, i amb alumnes de 15 anys és determinant. Per tant, crec que aquest és un aspecte important a millorar, ja que si això es fa de tant en quant, els alumnes sempre poden pensar que en qualsevol moment comença un nou torn, i això els ajuda a estar més al cas.

En aquesta mateixa línia de raonament, en l’enquesta que vaig passar als alumnes al final de la impartcició de la unitat didàctica, un estudiant em va agrair que m’hagués bellugat entre les taules per a controlar si els estudiants anaven fent els deures que els anava manant per fer a casa. Certament, haig d’admetre que vaig començar a fer això després de demanar consell al meu tutor, ja que havia començat a sospitar que força alumnes no feien els deures de casa. Aquest fet demostra, que els alumnes de les etapes de l’educació secundària obligatòria, sovint agraeixen que se’ls obligui d’alguna manera a fer les coses. Sovint no tenen la maduresa emocional per a buscar per iniciativa pròpia el que més els convé.

Per tant, el fet de forçar la participació de tothom en moltes de les classes, crec que pot acabar tenint un efecte molt positiu en la implicació de tothom en el mètode de pregunta, intuïció i debat. A la vegada, un cop establerta una dinàmica positiva que impliqui a tothom, crec que ha de ser més factible la participació voluntària en els debats per part de la majoria.

Un altre factor que penso pot influir en el fet que de que alguns alumnes no es mostrin prou participatius d’entrada, és que l’historial de mals resultats de molts d’ells, els fa pensar que són incapaços de raonar matemàticament. En aquest sentit, l’NCTM (organització basada als EE.UU. per a la millora de l’ensenyament de les matemàtiques), en la seva publicació *Reasoning and Sense Making,* on afirma que ‘el raonament matemàtic i el trobar sentit al que s’està fent hauria d’ocórrer a cada sessió de cada classe de matemàtiques’ [15], diu textualment als estudiants: “Desafia’t a tu mateix a fer les coses bé. Tingues fe en que tindràs èxit. L’evidència demostra que *l’esforç és el principal factor* en l’èxit matemàtic de l’estudiant. De fet, amb esforç i suport, tots els estudiants poden tenir èxit” [15].

Aquestes paraules, és important que les cregui en primer lloc el propi professor. D’aquesta manera, podrà aportar confiança als alumnes que estan desanimats, o es consideren a sí mateixos casos perduts. Si el professor fa un esforç especial adreçat a aquests alumnes, podrà aconseguir que aquests participin de manera més activa en el desenvolupament de les classes, i que estiguin més disposats a compartir les seves opinions amb el grup.

Per últim crec que val la pena destacar que la generació de debat per parelles o en grup durant les classes, en ocasions va provocar un cert descontrol. No és el mateix dir als alumnes, ‘ara teniu dos minuts per discutir amb el vostre company el per què...’, que dir ‘ja hem acabat, ara m’agradaria conèixer la vostra opinió’. Quan els alumnes arranquen a xerrar entre ells, no és excessivament fàcil fer-los parar. Així i tot, no penso que això hagi de suposar major problema al professor, conforme aquest va desenvolupant a major grau les seves habilitats de gestió de l’aula.

5. CONCLUSIONS

El mètode proposat en aquest treball, de pregunta, intuïció i debat en l'ensenyament de les matemàtiques, persegueix involucrar a tots els alumnes en el desenvolupament de les classes, i en la construcció del seu propi coneixement. Es tracta de que l'estudiant no sigui un mer espectador al coneixement que passa per davant del seus ulls. L'alumne ha de fer seu aquest coneixement. Ha d'estar segur d'allò que sap i d'allò que aprèn.

Quan l'alumne té una bona base, i ha fet seu el coneixement limitat que té, podem seguir edificant a partir d'aquest punt. Ningú ha de poder convèncer a l'alumne que el que ja sap és incorrecte o no té valor. Aquest coneixement és tant seu com nostre ara.

Per tant, sobre aquesta base, podem fer preguntes que facin avançar els coneixements dels nostres alumnes. Podem despertar la seva intuïció propiciant preguntes que els permetin associar allò nou que veuran amb el que ja saben, o amb la seva pròpia experiència. En comptes de presentar el nou coneixement com un què, deslligat de tot el que saben, busquem tot just el contrari, fer apreciar l'alumne el seu propi coneixement. Valorar el que ja sap i edificar al damunt, construir.

A la vegada, l'intercanvi d'opinions entre els alumnes en un ambient d'aprenentatge i de diàleg, els ofereix la possibilitat de justificar els seus raonaments i d'obligar-se a trobar sentit en allò que pensen i expressen. El treball en equip dinamitza el seu aprenentatge i els facilita a aprendre els uns dels altres.

No obstant això, a l'hora d'aplicar aquesta metodologia penso que no hem de ser dogmàtics. Malgrat els bons resultats obtinguts en la meva pròpia experiència d'aplicació d'aquests principis, l'experiència paral·lela d'observació de classes d'altres professionals, m'ha fet veure també, que el coneixement té diverses vies per assentar-se en les ments dels estudiants. Tot i que crec que és fonamental fer raonar, i que com diu l'NCTM, 'el raonament matemàtic i el trobar sentit al que s'està fent hauria d'ocórrer a cada sessió de cada classe de matemàtiques' [15], també crec que l'èxit del mètode depèn en part de la flexibilitat del propi professor a l'hora de dur-lo a la pràctica. En ocasions, la longitud del 'salt' que estem demanant fer als nostres alumnes, sobre el seu coneixement existent, és una mica més gran que en altres ocasions. En tals casos, la nostra insistència en pavimentar el camí per a que ells puguin arribar per sí mateixos a certes conclusions, pot portar a frustració, tant pels alumnes com per a nosaltres. En la meva opinió, en ocasions haurem de bellugar 'la bastida' amb l'alumne a sobre, per poder portar-lo així cap a un estadi de coneixement lleugerament superior.

La capacitat de raonar està en tots els humans, i el seu aprenentatge és un valor en sí mateix, que va més enllà del propi aprenentatge matemàtic. Però tot i així, hem de ser conscients de que sovint alguns conceptes s'arriben a entendre per mera repetició. D'aquesta manera, en ocasions ens ve la il·luminació sobre un cert assumpte en el moment més inesperat mentre repetim alguna acció que hem portat a terme nombroses vegades. En realitat, sense aquesta vessant de l'aprenentatge, els éssers humans mai podríem començar a fer el primer pas, i això és quelcom que hem de tenir en compte a l'hora de ser més o menys exigents en la capacitat de raonar dels nostres alumnes en un determinat moment.

Per tant, com a conclusió crec que el mestratge en l'aplicació correcte de la metodologia proposada és de capital importància. Si es dedica el temps necessari, l'esforç, la passió i el sentit comú a la preparació de cada sessió per a poder involucrar els alumnes en el seu propi aprenentatge, mitjançant preguntes engrescadores que fomentin l´ús del raonament i la intuïció, i propiciïn la generació de debat, els nostres alumnes aniran deixant enrere l'aversió a la solució de problemes i la cerca impacient de la 'fórmula màgica', i començaran a trobar delit en allò que nosaltres mateixos hi trobem i que hem fet motiu de la nostra tasca professional.

6. BIBLIOGRAFIA

[1] El Periódico, 16 d'octubre de 2012

[2] Sir Ken Robinson (2010). RSA Edge Lecture with Sir Ken Robinson - *Changing Paradigms*

[3] Dan Meyer (2010). TEDxNYED *Math Class Needs a Makeover*

[4] El País (3 de gener de 2012). *Cuatro horas ante la pantalla*

[5] Álvaro Marchesi (2003). *El fracaso escolar en España,* p. 22

[6] PISA 2009 rankings. http://www.oecd.org/pisa/pisa2009keyfindings.htm

[7] Álvaro Marchesi (2003). *El fracaso escolar en España,* p. 42-43

[8] Inés Maria Gómez Chacón. *La intuición en matemàticas*. http://www.mat.ucm.es/~imgomezc/vieja/ines-educar.pdf

[9] L.S. Vygotsky: *Mind in Society: Development of Higher Psychological Processes*, p. 86

[10] Sawyer, R. Keith. (2006). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*

[11] Verner, M. (2003). *The Pyramids: Their Archaeology and History*, p. 70

[12] Kirschner, Sweller i Clark (2006). *Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching*, p.1

[13] James W. Stigler, James Hiebert (1999). *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom,* cap. 3-7

[14] Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. Direcció General de l'Educació Bàsica i el Batxillerat. Neus Sanmartí (2010). *Avaluar per aprendre. L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències,* p. 3

[15] NCTM, National Council of Teachers of Mathematics (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning & Sense Making*